

7. FOLGE, 1958, BAND 1, HEFT 4-5

UNIVERSITY
OF MICHIGAN
ANNALEN JUL 23 1958
DER PHYSICS
PHYSIK LIBRARY

PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien,
M. Planck, E. Grüneisen, F. Möglich

Der ganzen Reihe 456. Band

Kuratorium:

W. GENTNER, W. GERLACH, F. HUND, B. KOCKEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, W. PAUL, R. W. POHL,
R. ROMPE, R. SEELIGER, W. WEIZEL

Herausgegeben von

H. KOPFERMANN
Heidelberg

G. RICHTER
Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 20. Mai 1958

Inhalt

Max Planck zum 100. Geburtstag	185
A. Papapetrou, Berlin: Über periodische Gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie	186
H. Grunewald und W. Neumann, Potsdam: Über die elektrische Leitfähigkeit von Blei-II-Oxyd mit Zusätzen von Neodymoxyd. Mit 1 Abbildung	198
J. Pachner, Prag: Ergänzung zum Variationsprinzip für klassische Feldtheorien	201
U. Schmidt, Marburg/Lahn: Über Auswertungsmöglichkeiten bei einem zweidimensionalen Farbschlierenverfahren. Mit 14 Abbildungen	203
J. Tichý, Liberec: Das elektrische Ersatzschema schwingender piezoelektrischer Kristallstäbchen. Mit 4 Abbildungen	219
T. Gajewski, Lódz: Über die asymptotischen Phasenverschiebungen in der Methode der Partialwellen bei Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom	232
U. Gradmann, Marburg/Lahn: Ein Phasenkontrastmikroskop zur Messung des Phasen- und Amplitudeneinflusses isolierter Objekte. Mit 5 Abbildungen	238
K. Rawer und K. Suchý, Breisach und Zürich: Äquivalenztheoreme bei der Wellenabsorption im Plasma	255
H. Rabenhorst und J. Melicherčík, Berlin-Adlershof: Dielektrische Eigenschaften von Bariumtitanat bei hohen Frequenzen und tiefen Temperaturen Mit 2 Abbildungen	261
R. Maushart, Karlsruhe: Über die Beweglichkeit positiver Ionen in extrem reinen Gasen und Gasgemischen. Mit 7 Abbildungen	264
H.-J. Strauß, Greifswald: Untersuchungen über den Existenzbereich der elektrolosen Ringentladung. Mit 15 Abbildungen	281
W. Nowak und T. Tietz, Lódz: Über eine Vereinfachung der Sommerfeldschen Polynommethode	296
T. Gajewski, Lódz: Über die relativistischen Phasenverschiebungen der Partialwellen im statistischen Thomas-Fermi-Streufelde	299

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Einsendung der Manuskripte erbeten an *Prof. Dr. H. Kopfermann, Heidelberg, Albert-Ueberle-Straße 7, Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6.*

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftenstitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „*Physikalischen Berichte*“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band 34,— (U. S. \$ 8.16) zuzügl. Postgebühren.

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

ANNALEN DER PHYSIK

7. FOLGE * BAND 1, HEFT 4-5 * 1958

MAX PLANCK

ZUM 100. GEBURTSTAG

Herausgeber, Kuratorium und Verlag der
„ANNALEN DER PHYSIK“

gedenken anlässlich des hundertsten Geburtstages von Max Planck
am 23. April 1958 in aufrichtiger Dankbarkeit seiner lebenslangen
Mitarbeit.

Den größten Teil seines Lebenswerkes — zweiundvierzig zum Teil um-
fangreiche Abhandlungen — veröffentlichte Planck zwischen 1881
und 1941 in unseren „Annalen“, darunter die berühmten Arbeiten,
welche die neue Physik begründeten:

„Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum“

Ann. Physik, 4, 553 (1901),

„Über die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität“

Ann. Physik, 4, 564 (1901),

„Über irreversible Strahlungsvorgänge“

Ann. Physik, 6, 818 (1901).

Ihm ist es zu verdanken, daß die Bände der folgenden drei Jahr-
zehnte eine fast lückenlose Geschichte der Entwicklung der Quanten-
theorie enthalten. Seit 1895 erschienen die „Annalen“ unter seiner
redaktionellen Mitwirkung, von 1906 bis 1947 war er Mitherausgeber
und 1947 hat er sein Ansehen und seine Arbeit dafür eingesetzt, unsere
älteste physikalische Zeitschrift in ihrem alten Verlag neu zu beleben.
Seit 1900 war Planck auch Mitglied des Kuratoriums der „Annalen“.
Wir hoffen, daß sein Beispiel, ein gut Teil der Arbeitskraft auch
dem Nutzen der Allgemeinheit durch die Förderung der wissen-
schaftlichen Hilfsmittel zu widmen, eine Verpflichtung für die
kommenden Generationen sein wird.

Über periodische Gravitations- und elektromagnetische Felder in der allgemeinen Relativitätstheorie

Von A. Papapetrou

Inhaltsübersicht

1. Es wird ein Gravitationsfeld $g^{\mu\nu}$ betrachtet mit den Eigenschaften: a) es hängt periodisch von der Zeit ab; b) es erfüllt die übliche Grenzbedingung im Unendlichen, $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$ für $r \rightarrow \infty$, so daß es in einem Bereich $r \geq r_0$ die Reihenentwicklung $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + {}_1 g^{\mu\nu} + {}_2 g^{\mu\nu} + \dots$ zuläßt; c) im Bereich $r \geq r_0$ gelten die Feldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$ der allgemeinen Relativitätstheorie. Es wird gezeigt, daß ein solches Feld im Bereich $r \geq r_0$ sich auf zeitunabhängige Form transformieren läßt.

2. Neben dem Gravitationsfeld $g^{\mu\nu}$ mit den Eigenschaften a), b) sei auch ein elektromagnetisches Feld $q_{\mu\nu}$ vorhanden, welches ebenfalls zeitlich periodisch (mit derselben Periode wie $g^{\mu\nu}$) ist. Im Bereich $r \geq r_0$ seien die Vakuumfeldgleichungen der Einstein-Maxwellschen Theorie erfüllt. Es wird gezeigt, daß in diesem Falle beide Felder sich auf zeitunabhängige Form transformieren lassen.

Einleitung

§ 1. In einer früheren Arbeit¹⁾ wurden singularitätenfreie Lösungen $g^{\mu\nu}$ der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1,1)$$

betrachtet, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) $g^{\mu\nu}$ hängt periodisch von der Zeit $t = x^4$ ab²⁾,

$$g^{\mu\nu}(x^i, t + T) = g^{\mu\nu}(x^i, t). \quad (1,2)$$

b) Es gilt die übliche Grenzbedingung im Unendlichen,

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu} \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (1,3)$$

$\eta^{\mu\nu}$ ist der Minkowskische metrische Tensor ($\eta^{44} = 1$, $\eta^{ik} = -\delta^{ik}$, $\eta^{4i} = 0$) und r der Abstand von einem Punkt eines gewissen „zentralen Bereiches“ des betrachteten Feldes. Es folgt aus (1,3), daß für genügend große Entfernung, $r \geq r_0$, das Feld $g^{\mu\nu}$ schwach und daher in eine Reihe entwickelbar wird:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + {}_1 g^{\mu\nu} + {}_2 g^{\mu\nu} + \dots \quad (1,4)$$

${}_1 g^{\mu\nu}$ ist der Term erster Ordnung, ${}_2 g^{\mu\nu}$ zweiter Ordnung usw.

1) Ann. Physik (6) 20, 399 (1957). Im folgenden wird diese Arbeit als I bezeichnet.
2) Lateinische Indizes durchlaufen die Werte 1, 2, 3, griechische die Werte 1, 2, 3 und 4.

c) Es wurden nur Felder $g^{\mu\nu}$ betrachtet, die im ganzen Raum schwach und daher durch die Entwicklung (1,4) darstellbar sind³⁾.

Ferner wurde die Erfüllung der Donderschen Koordinatenbedingung gefordert,

$$g^{\mu\nu}_{,\nu} = 0. \quad (1,5)$$

Die ausführliche Diskussion ergab dann, daß alle solche Lösungen der Feldgleichungen (1,1) trivial sind in dem Sinne, daß sie durch geeignete Koordinatentransformationen aus dem Minkowskischen Tensor $\eta^{\mu\nu}$ entstehen.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß dieses Ergebnis sich verallgemeinern läßt, und zwar in zwei Richtungen:

1. Bei einem reinen Gravitationsfeld werden wir die Bedingung c) fallen lassen, d. h. auch Felder betrachten, die in einem zentralen Bereich $r < r_0$ stark sind. In diesem Bereich darf dann das Feld auch Singularitäten besitzen.

2. Wir werden ein kombiniertes Gravitations- und elektromagnetisches Feld betrachten, wobei wir von den Feldgleichungen Gebrauch machen werden, die sich aus der additiv zusammengesetzten (nicht einheitlichen) Lagrange-Funktion

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{gr} + \chi \mathfrak{L}_{em} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{\chi}{2} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \quad (1,6)$$

ergeben. Für das Gravitationsfeld werden wir wieder die Erfüllung von a) und b) fordern. Für das elektromagnetische Feld werden wir dieselbe Periodizität voraussetzen:

$$\varphi_{\alpha}(x_i^i, t + T) = \varphi_{\alpha}(x^i, t). \quad (1,7)$$

Auch für das elektromagnetische Feld dürfen eventuelle Singularitäten nur im Bereich $r > r_0$ des starken Gravitationsfeldes vorhanden sein.

Für beide Fälle werden wir mit Hilfe der in I entwickelten Methode zeigen, daß die Grenzbedingung (1,3) nur dann befriedigt werden kann, wenn im Bereich $r \geq r_0$ des schwachen Gravitationsfeldes beide Felder in Wirklichkeit zeitunabhängig sind, d. h., wenn die Zeitabhängigkeit von $g^{\mu\nu}$ mit Hilfe einer Koordinatentransformation, die von φ_{α} mit Hilfe einer Eichtransformation aufgehoben werden kann.

Um die Darstellung nicht unnötig auszudehnen, werden wir, insbesondere bei der Behandlung des reinen Gravitationsfeldes, auf die Formeln und Beweise von I systematisch verweisen und sie hier nicht wiederholen. Nur die für die vorliegende Problemstellung nötigen Verallgemeinerungen dieser Beweise werden hier ausführlich beschrieben.

I. Reines Gravitationsfeld

§ 2. Nach der Feldgleichung erster Näherung (I 3,9) ist ${}_1g^{\mu\nu}$ eine Lösung der (speziell-relativistischen) Wellengleichung⁴⁾:

$$\square {}_1g^{\mu\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta} {}_1g^{\mu\nu, \alpha\beta} = 0. \quad (2,1)$$

In I wurde der allgemeine Ausdruck für die der Forderung (1,2) genügende Lösung von (2,1) mit Hilfe der Bedingungen b) und c) vereinfacht. Letztere

3) Offenbar sind durch die Forderung c) nur singularitätenfreie Felder zugelassen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß es auch andere singularitätenfreie Felder gibt, die der Forderung c) nicht genügen.

4) In I wurde ${}_1g^{\mu\nu} = v^{\mu\nu}$ und ${}_2g^{\mu\nu} = w^{\mu\nu}$ gesetzt.

Vereinfachung bestand darin, daß wir alle Terme mit negativ-indizierten Besselfunktionen weglassen konnten. Diese Terme müssen wir jetzt beibehalten. Wir legen also folgende Form von $g^{μν}$ zugrunde:

$$g^{μν} - g_{(0)}^{μν} = \sum_{λmn} \sin λωt \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} P_n^m \{ (A_{(λ)m}^{μνn} I_{n+\frac{1}{2}} + C_{(λ)m}^{μνn} I_{-(n+\frac{1}{2})}) \cos mφ \\ + (B_{(λ)m}^{μνn} I_{n+\frac{1}{2}} + D_{(λ)m}^{μνn} I_{-(n+\frac{1}{2})}) \sin mφ \} \\ + \sum_{λmn} \cos λωt \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} P_n^m \{ (A_{(λ)m}^{''μνn} I_{n+\frac{1}{2}} + C_{(λ)m}^{''μνn} I_{-(n+\frac{1}{2})}) \cos mφ \\ + (B_{(λ)m}^{''μνn} I_{n+\frac{1}{2}} + D_{(λ)m}^{''μνn} I_{-(n+\frac{1}{2})}) \sin mφ \} \quad (2,2)$$

mit $g_{(0)}^{μν} = \sum_{mn} P_n^m \frac{1}{r^{n+1}} (C_{(0)m}^{μνn} \cos mφ + D_{(0)m}^{μνn} \sin mφ) \quad (2,3)$

($λ = 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots; ω = \frac{2π}{T}$. P_n^m sind die zugeordneten Kugelfunktionen, $I_{±(n+1)}$ Besselfunktionen mit halbzahligen Indizes, A, B, C usw. Konstanten.) Im Gegensatz zu I gelten aber jetzt die Entwicklung (1,4) und daher auch die Formeln (2,2), (2,3) nur für $r \geq r_0$. Durch diesen Umstand werden einige Modifizierungen der in I gegebenen Beweisführung nötig. Dabei werden wir im allgemeinen so vorgehen, daß wir, um die der Entwicklung (1,4) entsprechenden Formeln verwenden zu können, den Bereich $r < r_0$ des starken Feldes aus unseren Betrachtungen ausschließen.

Dieser Bemerkung entsprechend muß zunächst der Hilfssatz von I § 6 abgeändert werden. Dies läßt sich aber ohne weiteres erreichen. Nehmen wir an, die Funktion $φ$ erfülle im Bereich $r \geq r_0$ die Gleichung

$$Δφ = f, \quad (2,4)$$

wobei f im betrachteten Bereich beschränkt ist. Daraus folgt durch Integration über den durch die Kugeln mit den Radien r_0 und r ($r \gg r_0$) begrenzten 3-dimensionalen Bereich:

$$\int_{r_0 r} Δφ dv = \int_{r_0 r} f dv. \quad (2,4a)$$

Das linke Integral läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes umformen:

$$\int_{r_0 r} Δφ dv = \int_S φ_{,i} n^i dS - \int_{S_0} φ_{,i} n^i dS, \quad (2,4b)$$

S und S_0 die Kugelflächen mit den Radien r und r_0 . Die Funktion f sei nun so beschaffen, daß sie für $r \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet; dann liefert das Integral auf der rechten Seite von (2,4a) bei großem r asymptotisch einen zu r proportionalen Wert. Dasselbe muß dann auch für das erste Integral auf der rechten Seite von (2,4b) gelten⁵⁾, so daß für $r \rightarrow \infty$ $φ_{,i}$ proportional zu $\frac{1}{r}$ und daher $φ$ logarithmisch unendlich wird.

⁵⁾ $φ_{,i}$ muß im ganzen Bereich $r \geq r_0$ endlich sein, da die Gl. (2,4) mit endlichem f erfüllt werden muß. Daher hat das zweite Integral auf der rechten Seite von (2,4b) einen endlichen Wert.

§ 3. Für die Form (2,2) von $g^{\mu\nu}$ ist das Theorem von I § 7 folgendermaßen zu modifizieren: Man kann eine Koordinatentransformation der Form (I 7,1),

$$x^{\mu} = x^{\mu} + f^{\mu}(x^{\alpha})$$

(f^{μ} klein von der ersten Ordnung) bestimmen, durch die die zeitabhängigen Teile von $g^{4\mu}$ und $\eta_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$ wegtransformiert werden:

$$g^{*4\mu} - g^{*4\mu}_{(0)} = 0, \quad \eta_{\alpha\beta} (g^{*\alpha\beta} - g^{*\alpha\beta}_{(0)}) = 0. \quad (3,1)$$

Man sieht sofort ein, daß es hierzu genügt, die f^{μ} aus den Gleichungen

$$f^4_{,4} = \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta} (g^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}_{(0)}) - \frac{1}{2} (g^{44} - g^{44}_{(0)}), \quad f^*_{,4} = f^4_{,4} - (g^{4*} - g^{4*}_{(0)}) \quad (3,2)$$

zu bestimmen. Und zwar ergeben diese Gleichungen für f^{μ} Ausdrücke, die ähnlich gebaut sind wie die rechte Seite von (2,2).

Die Tatsache, daß wir jetzt die Größen $g^{*4\mu}_{(0)}$ und $\eta_{\alpha\beta} g^{*\alpha\beta}_{(0)}$ nicht wegtransformieren können, ist für die Fortsetzung der Beweisführung ohne Bedeutung, da in die zur Bestimmung von g^{44} dienende Gl. (I 7,14) nur die Ableitungen $g^{*\mu\nu}_{,4}$ und $\eta_{\alpha\beta} g^{*\alpha\beta}_{,4}$ eingehen. Die nach (3,1) zeitunabhängigen $g^{*4\mu}$ und $\eta_{\alpha\beta} g^{*\alpha\beta}$ werden also keinen Beitrag liefern, so daß die Formel (I 7,15) unverändert gilt. Auch in dieser Formel dürfen wir den zeitunabhängigen Teil von g^{*pq} weglassen, weil

$$g^{*pq}_{,4} = (g^{*pq} - g^{*pq}_{(0)})_{,4}.$$

Wenn wir die zu (I 8,3) führende Rechnung wiederholen, indem wir statt (I 5,6) die volle Formel (2,2) für $g^{*pq} - g^{*pq}_{(0)}$ verwenden, finden wir zunächst an Stelle von (I 8,2):

$$\int (g^{*pq}_{(0)})^2 dv = \pi \sum_{mn} \int_{r_0 r}^{\infty} \frac{1}{r} \{ (A_{(0)m}^{*pqn} I_{n+\frac{1}{2}} + C_{(0)m}^{*pqn} I_{-(n+\frac{1}{2})})^2 + (B_{(0)m}^{*pqn} I_{n+\frac{1}{2}} + D_{(0)m}^{*pqn} I_{-(n+\frac{1}{2})})^2 \} r^2 dv. \quad (3,3)$$

Die asymptotische Form der Besselfunktionen $I_{\pm(n+\frac{1}{2})}(\zeta)$ für große ζ lautet ($\zeta = \lambda k r$, $k = \frac{\omega}{c}$):

$$I_{n+\frac{1}{2}}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \cos\left(\zeta - \frac{n+1}{2} n\right) + \dots, \quad I_{-(n+\frac{1}{2})}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \cos\left(\zeta + \frac{n}{2} n\right) + \dots \quad (3,4)$$

Daraus folgt, daß die in $I_{n+\frac{1}{2}}$ bzw. in $I_{-(n+\frac{1}{2})}$ quadratischen Terme der rechten Seite von (3,3) denselben Beitrag zum divergierenden Volumintegral liefern:

$$\frac{1}{r} (I_{n+\frac{1}{2}})^2 = \frac{1}{2 \lambda k} \cdot \frac{1}{r^2} + \dots, \quad \frac{1}{r} (I_{-(n+\frac{1}{2})})^2 = \frac{1}{2 \lambda k} \cdot \frac{1}{r^2} + \dots.$$

Ferner ergibt sich aus (3,4)

$$\frac{1}{r} I_{n+\frac{1}{2}} I_{-(n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \lambda k} \cdot \frac{\sin 2 \lambda k r}{r^2} + \dots.$$

Die Terme mit dem Faktor $I_{n+\frac{1}{2}} I_{-(n+\frac{1}{2})}$ auf der rechten Seite von (3,3) liefern also keinen Beitrag zum divergierenden Volumintegral. Daher erhalten wir wieder eine Beziehung der Form (I 8,3),

$$\int_{r_0 r}^{\infty} \frac{1}{2} \sum_{pq} (g^{*pq}_{(0)})^2 dv = \frac{\pi}{4} k^2 \sum_{pq} \sum_{\lambda} \sum_{mn} \lambda^2 (\alpha_{(0)m}^{*pqn})^2 \cdot \int_{r_0 r}^{\infty} \frac{1}{r} (I_{n+\frac{1}{2}})^2 \cdot r^2 dr, \quad (3,5)$$

wobei aber jetzt (I 8,4) durch folgende Beziehung ersetzt wird:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_{(2)m}^{*pqn})^2 &= (A_{(2)m}^{*pqn})^2 + (B_{(2)m}^{*pqn})^2 + (C_{(2)m}^{*pqn})^2 + (D_{(2)m}^{*pqn})^2 \\ &+ (A_{(2)m}^{*''pqn})^2 + (B_{(2)m}^{*''pqn})^2 + (C_{(2)m}^{*''pqn})^2 + (D_{(2)m}^{*''pqn})^2. \end{aligned} \right\} \quad (3,6)$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß man aus (I 7,15) nur dann ein mit der Grenzbedingung (1,3) verträgliches \underline{g}^{44} erhalten wird, wenn sämtliche in (3,6) auftretenden Koeffizienten A^* , B^* , C^* und D^* verschwinden, d. h. nach (2,2), wenn auch die Komponenten \underline{g}^{*pq} zeitunabhängig sind. In dem die Forderungen (3,1) befriedigenden Koordinatensystem x^{μ} müssen also alle Komponenten $\underline{g}^{*\mu\nu}$ zeitunabhängig sein.

§ 4. Bei den folgenden Betrachtungen werden wir nur von den bisher mit x^{μ} bezeichneten Koordinatensystemen Gebrauch machen, in denen nach dem obigen Ergebnis die Größen $\underline{g}^{*\mu\nu}$ zeitunabhängig sein müssen. Es ist also kein Mißverständnis zu befürchten, wenn wir einfach x^{μ} statt x^{μ} schreiben. Wir betrachten zunächst die Feldgleichung zweiter Näherung (I 3,13), die zur Bestimmung von $\underline{g}^{\mu\nu}$ dient. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur zeitunabhängige Terme, welche für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 4$ verschwinden⁶⁾. Die Lösung $\underline{g}^{\mu\nu}$ von (I 3,13) ist die Summe der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung $\square \underline{g}^{\mu\nu} = 0$, die wieder von der Form (2,2), (2,3) wird, und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gl. (I 3,13). Wegen der eben erwähnten Struktur der Inhomogenität wird die einfachste spezielle Lösung zeitunabhängig sein und nur Terme enthalten, die für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ verschwinden.

Man kann nun beweisen, daß der zeitabhängige Teil von $\underline{g}^{\mu\nu}$, ähnlich wie der von $\underline{g}^{\mu\nu}$, durch eine Koordinatentransformation wegtransformierbar sein muß. Man erreicht dies durch die für $\underline{g}^{\mu\nu}$ verwendete Methode, wobei man diesmal von der Feldgleichung vieter Näherung ausgeht. Diese Feldgleichung läßt sich in gedrängter Form folgendermaßen schreiben:

$$\square \underline{g}^{\mu\nu} = [(\underline{g}^4)^{\mu\nu} + (\underline{g}^2 \underline{g})^{\mu\nu} + (\underline{g} \underline{g} \underline{g})^{\mu\nu} + (\underline{g}^2)^{\mu\nu}]. \quad (4,1)$$

Dabei bedeutet $[(\underline{g}^4)^{\mu\nu}]$ eine Summe von Termen, von denen jeder vier Faktoren erster Ordnung enthält; in $[(\underline{g}^2 \underline{g})^{\mu\nu}]$ sind Terme mit zwei Faktoren erster und einem zweiter Ordnung enthalten usw. Man beachte noch, daß in jedem Term auch zwei Differentiationen auftreten.

Wir bilden den zeitlichen Mittelwert der Gl. (4,1) über die Grundperiode T . Da nach dem Ergebnis von § 3 $\underline{g}^{\mu\nu}$ zeitunabhängig sein muß, folgt

$$-\Delta \underline{g}^{\mu\nu} = [(\underline{g}^4)^{\mu\nu} + (\underline{g}^2 \underline{g})^{\mu\nu} + (\underline{g} \underline{g} \underline{g})^{\mu\nu} + (\underline{g}^2)^{\mu\nu}]. \quad (4,2)$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die Summe von Termen, die für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 6$ verschwinden. Eine ähnliche Struktur, aber mit $\alpha \geq 5$, hat auch der zweite Term von (4,2). Beachten wir noch, daß für $\underline{g}^{\mu\nu}$ eine Feldgleichung der Form

$$-\Delta \underline{g}^{\mu\nu} = [(\underline{g}^3)^{\mu\nu} + (\underline{g} \underline{g} \underline{g})^{\mu\nu}] \quad (4,3)$$

gilt, so folgt, daß auch $\underline{g}^{\mu\nu}$ aus Termen besteht, die für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit

6) Nach (2,3) enthält jeder Faktor $\underline{g}^{\mu\nu}$ nur Terme, die zu $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 1$ proportional sind. Man beachte noch, daß die Differentiation nach x^{ℓ} eines zu $r^{-\alpha}$ proportionalen Termes eine zu $r^{-(\alpha+1)}$ proportionale Größe ergibt.

$\alpha \geq 1$
ist also
ergeben
luminte

Bei
notwendig
 $\underline{g}^{\mu\nu} = 0$
nimmt.
wenn
die frühe
ponenten
Ergebnis
transfor
logarith
der zeit
ist.

Dies
stufen
Jede p
genügt,
passen

§ 5.
frei ist
sind. V
auf ein
Proble
nichtsin
würde
der Fel
Minko
geeigne
daß ein
ergibt.
sche n
in einer
Wir ha
reich r
bringen

And
merkte
(2,3) v
feldes,

7)
von (2,2
steh
Termes
zeituna

$\alpha \geq 1$ verschwinden⁷⁾. Der dritte Term auf der rechten Seite von (4,2) ist also eine Summe von Termen, die wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 4$ verschwinden. Danach ergeben die drei ersten Terme der rechten Seite von (4,2) nur endliche Volumintegrale im Sinne des Hilfssatzes von § 2.

Bei dem letzten Term von (4,2) wird die Kenntnis seiner genauen Struktur notwendig. Diese folgt aber unmittelbar aus der Bemerkung, daß im Falle $g^{uu} = 0$ (und $g^{vv} = 0$) g^{uu} die Rolle von g^{uu} und g^{vv} die von g^{uu} übernimmt. Die Summe $[(gg)^2]^{uu}$ entsteht also aus der rechten Seite von (I 3,13), wenn man überall g^{uu} durch g^{uu} ersetzt. Daraus folgt aber weiter, daß man die frühere Beweisführung ohne jede Änderung für die Diskussion der Komponente $\mu = \nu = 4$ der Gl. (4,2) wiederholen kann, wodurch man zu folgendem Ergebnis geführt wird: Wenn der zeitabhängige Teil von g^{uu} nicht wegttransformierbar ist, ergibt sich aus (4,2) für g^{44} ein Wert, der für $r \rightarrow \infty$ logarithmisch unendlich wird. Die Grenzbedingung (1,3) verlangt also, daß der zeitabhängige Teil von g^{uu} , ähnlich wie der von g^{uu} , wegttransformierbar ist.

Diesen Beweis kann man ersichtlich auch bei den höheren Näherungsstufen wiederholen. Damit gelangt man zu dem folgenden Endergebnis: Jede periodische Lösung der Feldgleichungen, die der Grenzbedingung (1,3) genügt, läßt sich im Bereich $r \geq r_0$ des schwachen Gravitationsfeldes durch passende Koordinatentransformation in eine zeitunabhängige Form bringen.

§ 5. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß das Feld singularitätenfrei ist, d. h. daß die Feldgleichungen (1,1) auch im Bereich $r < r_0$ erfüllt sind. Wenn man jedes solche Feld auch im Inneren des Bereiches $r < r_0$ auf eine zeitunabhängige Form bringen könnte, so hätte man dadurch das Problem des periodischen nichtsingulären Feldes auf das des zeitunabhängigen nichtsingulären Feldes zurückgeführt. Aus dem Satz von Lichnerowicz würde man dann folgern, daß jede solche periodische nichtsinguläre Lösung der Feldgleichungen einen ebenen Raum beschreibt, d. h. daß sie sich aus dem Minkowskischen metrischen Tensor der speziellen Relativitätstheorie durch geeignete Koordinatentransformation gewinnen läßt. Es sei aber betont, daß eine solche Schlußfolgerung sich keineswegs aus den vorigen Betrachtungen ergibt. Vielmehr lassen diese Betrachtungen die Möglichkeit zu, daß es periodische nichtsinguläre, der Grenzbedingung (1,3) genügende Felder gibt, die in einem zentralen Bereich $r < r_0$ stark und wesentlich zeitabhängig⁸⁾ sind. Wir haben nur bewiesen, daß solche Felder, falls sie existieren, sich im Bereich $r \geq r_0$ durch Koordinatentransformation auf eine zeitunabhängige Form bringen lassen müssen.

Andererseits aber ist unser Ergebnis, wie wir schon in der Einleitung bemerkten, nicht nur auf singularitätenfreie Felder anwendbar. Die Form (2,2), (2,3) von g^{uu} stellt nämlich, im Bereich $r \geq r_0$ des schwachen Gravitationsfeldes, die allgemeine, mit der Grenzbedingung (1,3) verträgliche Lösung der

⁷⁾ g^{uu} ist die Summe der Lösung der homogenen Gl. (4,3), die die Form der rechten von (2,3) hat, und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung (4,3). Letztere besteht aus Termen, die wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 2$ verschwinden, da die Inhomogenität von (4,3) Terme enthält, die wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 4$ verschwinden.

⁸⁾ D. h., die man im Bereich $r < r_0$ mit keiner Koordinatentransformation auf eine zeitunabhängige Form bringen kann.

Feldgleichung erster Näherung dar und ist nicht auf Felder beschränkt, die auch im Bereich $r < r_0$ die Feldgleichungen befriedigen. Ähnlich sind wir auch bei den höheren Näherungen vorgegangen. Daher gelten unsere Betrachtungen nicht nur für singularitätenfreie Lösungen, sondern auch für solche, die im Bereich $r < r_0$ Singularitäten besitzen. Wir haben also den allgemeinen Satz bewiesen: Jede periodische Lösung der Feldgleichungen – mit oder ohne Singularitäten –, die die Grenzbedingung (1,3) genügt, läßt sich im Bereich $r \geq r_0$ durch Koordinatentransformation auf eine zeitunabhängige Form bringen.

In der Newtonschen Gravitationstheorie gibt es viele Möglichkeiten von periodischen Feldern. Z. B. entspricht jedem Zweikörpersystem ein periodisches Gravitationsfeld. In der allgemeinen Relativitätstheorie stellt die Newtonsche Behandlung (bei langsam Bewegungen) die erste Näherung dar. In den meisten Fällen geht aber die Periodizität in der zweiten Näherung verloren: Im Falle eines Zweikörpersystems mit nichtkreisförmigen Newtonschen Bahnen führen die Einstein-Infeld-Hoffmannschen Bewegungsgleichungen⁹⁾ in der zweiten Näherung zu einer langsam Drehung des Periastrons¹⁰⁾, durch die die strenge Periodizität aufgehoben wird. Es gibt aber einen Fall, in dem man eine Aufrechterhaltung der Periodizität in den höheren Näherungen erwarten würde. Es ist dies der Fall von zwei Körpern, die sich in der Newtonschen Näherung auf Kreisbahnen bewegen: Nach qualitativen Überlegungen dürfte die Behandlung dieses Problems nach der Einstein-Infeld-Hoffmannschen Methode (unter Ausschluß von Strahlungseffekten) die Rotationssymmetrie der Bahnen und die Periodizität auch in den höheren Näherungen erhalten. Ein solches Feld sollte aber ersichtlich auch im Bereich $r \geq r_0$ wesentlich zeitabhängig sein¹¹⁾, so daß seine Existenz einen Widerspruch zu dem oben aufgestellten Satz bildet. Die physikalische Bedeutung dieses Sachverhalts ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Eine besonders einfache Deutungsmöglichkeit wäre, anzunehmen, daß die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie bei allen beschleunigten Bewegungen, durch welche zeitabhängige Felder erzeugt werden, notwendig zu Strahlungseffekten führen. Dies stellt aber zunächst nur eine Vermutung dar. Über ihre Richtigkeit wird man nur mit Hilfe von tiefergehenden Untersuchungen entscheiden können.

II. Gravitations- und elektromagnetisches Feld

§ 6. Die aus (1,6) sich ergebenden Feldgleichungen des kombinierten Feldes lauten:

$$\mathfrak{R}_\nu^\mu - \frac{1}{2} \delta_\nu^\mu \mathfrak{R} = -\kappa \mathfrak{D}_\nu^\mu, \quad (6,1)$$

$$\mathfrak{D}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0, \quad (6,2)$$

mit

$$F_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta,\alpha} - \varphi_{\alpha,\beta}, \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}.$$

⁹⁾ Ann. Math. **39**, 65 (1938).

¹⁰⁾ H. P. Robertson, Ann. Math. **39**, 101 (1938).

¹¹⁾ Nur bei besonders hoher Symmetrie, z. B. axialsymmetrischer Materieverteilung und gleichmäßiger Drehung um die Symmetrieachse, kann das Feld zeitunabhängig sein.

In (6,1) bedeutet \mathfrak{T}_ν^μ den Maxwellschen Spannungstensor des elektromagnetischen Feldes:

$$\mathfrak{T}_\nu^\mu = -\mathfrak{F}^{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu \mathfrak{F}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \quad (6,3)$$

Für das Gravitationsfeld fordern wir wieder die Erfüllung der Grenzbedingung (1,3). Es wird also einen Bereich $r \geq r_0$ geben, in dem $g^{\mu\nu}$ als schwaches Feld durch die Reihenentwicklung (1,4) darstellbar ist. In diesem Bereich wird man auch das elektromagnetische Potential φ_α in eine Reihe entwickeln können. Beachtet man, daß die linke Seite der Feldgleichung (6,1) mit einem Term erster Ordnung beginnt und daß die Gravitationskonstante als klein von der ersten Ordnung anzusehen ist, so folgt, daß \mathfrak{T}_ν^μ und daher auch φ_α mit einem Term nullter Ordnung beginnen muß:

$$\varphi_\alpha = {}_0\varphi_\alpha + {}_1\varphi_\alpha + \dots \quad (6,4)$$

Wir werden fordern, daß im ganzen Bereich $r \geq r_0$ die Feldgleichungen (6,1), (6,2) mit (6,3) gelten. Eventuelle Quellen des elektromagnetischen Feldes und zusätzliche (nicht elektromagnetische) Quellen des Gravitationsfeldes dürfen nur im zentralen Bereich $r < r_0$ liegen.

Für das Gravitationsfeld verwenden wir wieder die Dondersche Koordinatenbedingung (1,5). Entsprechend werden wir für das elektromagnetische Feld die Lorentzsche Eichung fordern:

$$(g^{\mu\nu} \varphi_\nu)_{,\mu} = 0. \quad (6,5)$$

Wegen (1,5) können wir dafür auch schreiben:

$$g^{\mu\nu} \varphi_{\nu,\mu} = 0. \quad (6,5a)$$

Aus (6,2) und (6,5) ergeben sich für das elektromagnetische Feld nach (1,4) und (6,4) in nullter Näherung die Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie:

$$\square {}_0\varphi_\alpha = 0, \quad (6,6)$$

$$\eta^{\alpha\beta} {}_0\varphi_{\alpha,\beta} = 0. \quad (6,7)$$

Für das Gravitationsfeld findet man aus (6,1) und (6,3) in der ersten Näherung, nach einigen Umformungen mit Hilfe von (6,6) und (6,7), die Feldgleichung:

$$\square {}_1 g^{\mu\nu} = 2\kappa \left\{ -\frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \square ({}_0\varphi_\alpha {}_0\varphi_\beta) + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \square ({}_0\varphi_\alpha^\mu {}_0\varphi_\beta^\nu) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\beta\alpha} ({}_0\varphi_\alpha^\beta {}_0\varphi_\beta^\alpha)_{,\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \eta^{\alpha\beta} ({}_0\varphi_\alpha {}_0\varphi_\beta)_{,\beta} + {}_0\varphi_\beta {}_0\varphi_{\beta,\alpha} \right\}. \quad (6,8)$$

Da nach (1,7) φ_α und daher auch ${}_0\varphi_\alpha$ periodisch in der Zeit mit der Periode T ist, wird die allgemeine Lösung der Wellengleichung (6,6) genau so gebaut wie die frühere Größe ${}_1 g^{\mu\nu}$ nach (2,2), (2,3)¹². Die Bedingung (6,7) wird eine

¹² Die zu r^n mit $n \geq 1$ proportionalen Terme auf der rechten Seite von (I,5,5) müssen wieder ausgeschlossen werden. Solchen Termen entspricht nämlich ein mit wachsendem r immer stärker werdendes elektromagnetisches Feld; dann kann aber das Gravitationsfeld die Grenzbedingung (1,3) nicht erfüllen. Die Terme mit $n = 0$ sind einfache Konstanten und daher bedeutungslos.

Reihe von Beziehungen zwischen den in den Ausdrücken für ${}_0\varphi_\alpha$ auftretenden Konstanten A, B usw. liefern. Diese Beziehungen werden wir hier nicht näher verfolgen.

Ähnlich wie bei der Ableitung von (I 4,5) aus (I 3,13) erhalten wir hier aus (6,8) durch Mittelwertbildung über die Periode T die Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta_1 \overline{g^{\mu\nu}} &= 2\pi \left\{ \left(\frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right) \eta^{kl} ({}_0\varphi_\alpha {}_0\varphi_\beta)_{,k} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \eta^{kl} \eta^{mn} ({}_0\varphi_k {}_0\varphi_m)_{,n} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \eta^{kl} ({}_0\varphi_\alpha {}_0\varphi_{k,\beta} + {}_0\varphi_\beta {}_0\varphi_{k,\alpha}) \Big\}_{,l} \\ &\quad \left. - 2\pi \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \eta^{\rho\sigma} {}_0\varphi_{\rho,\alpha} {}_0\varphi_{\sigma,\beta} \right. . \end{aligned} \quad (6,9)$$

Diese Beziehung wird bei dem folgenden Beweis dieselbe Rolle spielen wie die Beziehung (I 4,5) bei dem reinen Gravitationsfeld.

§ 7. Wir betrachten die Komponente $\mu = \nu = 4$ der Gl. (6,9):

$$-\Delta_1 \overline{g^{44}} = 2\pi \{ \dots \}_{,l} - 2\pi \eta^{\rho\sigma} {}_0\varphi_{\rho,4} {}_0\varphi_{\sigma,4}. \quad (7,1)$$

Nach dem Hilfssatz von § 2 wird diese Beziehung nur dann ein für $r \rightarrow \infty$ endliches $\overline{g^{44}}$ ergeben, wenn das Volumintegral ihrer rechten Seite keinen zu r proportionalen Wert ergibt. Ähnlich wie bei der Diskussion der Gl. (I 5,7) in I § 6 kann man sich auch hier überzeugen, daß der Term $2\pi \{ \dots \}_{,l}$ in (7,1) ein endliches Volumintegral liefert. Wir brauchen also nur das Integral des letzten Termes von (7,1) näher zu betrachten. Dafür müssen wir zunächst folgendes Theorem beweisen:

Man kann eine Eichtransformation bestimmen,

$${}_0\varphi_\alpha^* = {}_0\varphi_\alpha + A_{,\alpha}, \quad (7,2)$$

so daß das neue Potential ${}_0\varphi_\alpha^*$ wieder die Gln. (6,6) und (6,7) befriedigt und darüber hinaus die Komponente ${}_0\varphi_4^*$ zeitunabhängig wird:

$${}_0\varphi_{4,4}^* = 0. \quad (7,3)$$

Die erste Forderung ist offenbar erfüllt, wenn die Funktion A eine Lösung der Wellengleichung ist:

$$\square A = 0.$$

Die Forderung (7,3) läßt sich mit Hilfe von (7,2) schreiben:

$${}_0\varphi_{4,4} + A_{,44} = 0;$$

oder, wenn ${}_0\varphi_{4(0)}$ den zeitunabhängigen Teil von ${}_0\varphi_4$ bedeutet:

$$({}_0\varphi_4 - {}_0\varphi_{4(0)} + A_{,4})_{,4} = 0.$$

Die Forderung (7,3) wird also erfüllt, wenn man A aus der Gleichung

$$A_{,4} = -({}_0\varphi_4 - {}_0\varphi_{4(0)}) \quad (7,4)$$

bestimmt. Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine Summe von der Form der rechten Seite von (2,2). Daher bestimmt (7,4) die Funktion A eindeutig, bis auf einen zeitunabhängigen Term $A_{(0)}$. Der Term $A_{(0)}$ ist aber für unsere Betrachtungen unwesentlich und kann z. B. gleich Null gesetzt werden.

Drücken wir nun die rechte Seite von (7,1) mit Hilfe des eben bestimmten Potentials ${}_0\varphi_\alpha^*$ aus, so ergibt sich für den letzten Term

$$-2\kappa \eta^{\sigma} {}_0\varphi_{\sigma,4}^* {}_0\varphi_{\sigma,4}^* = 2\kappa \sum_k \overline{({}_0\varphi_{k,4}^*)^2} \quad (k=1,2,3). \quad (7,5)$$

Wir haben also eine Summe von Quadraten, ähnlich wie in der Formel (I 7,15). Auch die einzelnen Terme dieser Summe haben dieselbe Form wie die entsprechenden Terme der Summe $\frac{1}{2} \sum_{pq} \overline{({}_1g_{4,pq}^*)^2}$, da sowohl ${}_0\varphi_k^*$ wie auch ${}_1g_{4,pq}^*$ die Form (2,2) haben. Daher läßt sich bei dem vorliegenden Problem die Beweisführung des § 3 ohne jede Änderung wiederholen und führt zu folgendem Ergebnis: Das aus (7,1) zu bestimmende ${}_1g^{44}$ wird nur dann für $r \rightarrow \infty$ endlich, wenn alle Komponenten ${}_0\varphi_\alpha^*$ zeitunabhängig sind. Mit anderen Worten: Notwendige Bedingung für die Befriedigung der Grenzbedingung (1,3) ist, daß das elektromagnetische Feld nullter Ordnung im Bereich $r \geq r_0$ des schwachen Gravitationsfeldes zeitunabhängig ist.

§ 8. Bei der Diskussion der höheren Näherungen werden wir nur das zeitunabhängige Potential nullter Ordnung ${}_0\varphi_\alpha^*$ verwenden. Wir dürfen also, ohne ein Mißverständnis zu befürchten, statt ${}_0\varphi_\alpha^*$ einfach ${}_0\varphi_\alpha$ schreiben. In der nächsten Näherung ergeben sich aus den Feldgleichungen (6,1), (6,2) und den Bedingungen (1,5), (6,5) zwei Gleichungen für die Größen ${}_1\varphi_\alpha$ und ${}_2g^{\mu\nu}$. Diese lassen sich mit Hilfe der in § 4 verwendeten symbolischen Bezeichnung folgendermaßen schreiben:

$$\square {}_1\varphi_\alpha = [{}_1g {}_0\varphi]_\alpha, \quad (8,1)$$

$$\square {}_2g^{\mu\nu} = [({}_1g)^2]^{\mu\nu} + \kappa [{}_1\varphi {}_0\varphi + {}_1g ({}_0\varphi)^2]^{\mu\nu}. \quad (8,2)$$

Daraus folgt durch Mittelwertbildung über die Periode T (da ${}_0\varphi_\alpha = \overline{{}_0\varphi_\alpha}$ ist):

$$-\Delta \overline{{}_1\varphi_\alpha} = [\overline{{}_1g} {}_0\varphi]_\alpha, \quad (8,1a)$$

$$-\Delta \overline{{}_2g^{\mu\nu}} = [\overline{({}_1g)^2}]^{\mu\nu} + \kappa [\overline{{}_1\varphi} {}_0\varphi + \overline{{}_1g} ({}_0\varphi)^2]^{\mu\nu}. \quad (8,2a)$$

Aus (6,9) und (8,1a) ergibt sich, ähnlich wie bei der Diskussion der Gl. (4,3), daß ${}_1g^{\mu\nu}$ und $\overline{{}_1\varphi_\alpha}$ Summen von Termen sind, die für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 1$ verschwinden. Daher kann in (8,2a) nur der erste Term der rechten Seite ein für $r \rightarrow \infty$ proportional zu r divergierendes Volumintegral liefern. Dieser Term ist aber nichts anderes als die rechte Seite der Gl. (I 4,5). Es gilt also für ihn die Diskussion und das Ergebnis des § 3: Aus (8,2a) kann sich nur dann ein bei $r \rightarrow \infty$ endliches $\overline{{}_2g^{\mu\nu}}$ ergeben, wenn ${}_1g^{\mu\nu}$ im wesentlichen (d. h. bis auf Koordinatentransformationen) zeitunabhängig ist:

$$\overline{{}_1g^{\mu\nu}} = \overline{{}_1g^{\mu\nu}}. \quad (8,3)$$

In der folgenden Näherung ergeben sich aus (6,1) und (6,2) die Gleichungen

$$\square {}_2\varphi_\alpha = [{}_2g {}_0\varphi + ({}_1g)^2 {}_0\varphi_\alpha^* + {}_1g {}_1\varphi]_\alpha, \quad (8,4)$$

$$\square {}_3g^{\mu\nu} = [({}_1g)^3 + {}_1g {}_2g^{\mu\nu} + \kappa [({}_1g)^2 + {}_1g {}_1\varphi {}_0\varphi + ({}_1g)^2 ({}_0\varphi)^2 + {}_2g ({}_0\varphi)^2]^{\mu\nu}]. \quad (8,5)$$

Aus diesen folgt durch Mittelwertbildung über die Periode T :

$$-\Delta \overline{{}_2\varphi_\alpha} = [\overline{{}_2g} {}_0\varphi + ({}_1g)^2 {}_0\varphi + \overline{{}_1g} {}_1\varphi]_\alpha, \quad (8,4a)$$

$$-\Delta \overline{{}_3g^{\mu\nu}} = [({}_1g)^3 + \overline{{}_1g} \overline{{}_2g}^{\mu\nu} + \kappa [\overline{({}_1g)^2} + \overline{{}_1g} \overline{{}_1\varphi} {}_0\varphi + ({}_1g)^2 ({}_0\varphi)^2 + \overline{{}_2g} ({}_0\varphi)^2]^{\mu\nu}]. \quad (8,5a)$$

Aus (8,2a) und (8,3) folgt, daß g^{44} nur Terme enthält, die für $r \rightarrow \infty$ wie $r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 1$ verschwinden. Dasselbe ergibt sich für φ_α aus (8,1a). Daher kann in der rechten Seite von (8,5a) ein für $r \rightarrow \infty$ proportional zu r divergierendes Volumintegral nur von dem Term $\propto [(\varphi)^2]^{1/2}$ herrühren. Die genaue Struktur dieses Termes stimmt aber mit derjenigen der rechten Seite von (6,9) überein, wenn man dort überall φ_α durch φ_α ersetzt¹³⁾. Daher gilt für das Volumintegral des Termes $\propto [(\varphi)^2]^{1/2}$ die Diskussion des § 7, aus der sich ergibt: Die Forderung eines bei $r \rightarrow \infty$ endlichen g^{44} kann nur befriedigt werden, wenn φ_α zeitunabhängig ist:

$$\varphi_\alpha = \bar{\varphi}_\alpha. \quad (8,6)$$

Bei jeder folgenden Näherungsstufe werden die neuen Feldgleichungen je einen neuen Term aus den Entwicklungslinien von φ_α und g^{44} enthalten. Der Beweis läßt sich für sie unverändert wiederholen, und das Endergebnis lautet: Bei einem periodischen Gravitations- und elektromagnetischen Feld (mit derselben Periode T) kann die Grenzbedingung (1,3) nur befriedigt werden, wenn im Bereich $r \geq r_0$ des schwachen Gravitationsfeldes die Zeitabhängigkeit beider Felder scheinbar ist, d. h. wenn sie durch geeignete Koordinaten- und Eichtransformationen aufgehoben werden kann. Für den eventuell existierenden „zentralen“ Bereich mit starkem Gravitationsfeld können wir aber mit Hilfe der hier verwendeten Methode keine Aussagen machen.

§ 9. Die Tatsache, daß bei einem wesentlich zeitabhängigen periodischen Feld φ_α ¹⁴⁾ die Größe g^{44} für große r logarithmisch divergiert, hat eine einfache physikalische Deutung: Die (speziell-relativistisch berechnete) mittlere Energiedichte $\bar{\mathcal{E}}_4$ dieses Feldes enthält einen zu $\frac{1}{r^2}$ proportionalen Term. Man wird daher zu einer bei $r \rightarrow \infty$ proportional zu r divergierenden Gesamtenergie geführt, was nach dem Satz des § 2 ein logarithmisch divergierendes g^{44} zur Folge hat.

Auch für den Fall eines reinen Gravitationsfeldes läßt sich das Verhalten von g^{44} bei einem wesentlich zeitabhängigen periodischen g^{44} in analoger Weise deuten: Die rechte Seite von (I 5,7) wird man als den Anfangsterm der Reihenentwicklung für die (mit -2 multiplizierte) mittlere Energiedichte des Gravitationsfeldes zu betrachten haben; diese nimmt für $r \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{r^2}$ ab und daher ergibt sich aus Gl. (I 5,7) das logarithmisch divergierende g^{44} . Die Beziehung dieser Energiedichte zu dem Pseudotensor t^a_a läßt sich ohne weiteres aufstellen, wenn man die aus der Symmetrisierung von $\mathcal{E}^a_a + t^a_a$ sich ergebenden Formeln betrachtet¹⁵⁾. Bei Gültigkeit der von Donder-schen Koordinatenbedingung nimmt nämlich die Feldgleichung (1,1) die

¹³⁾ Man denke nämlich an den Fall $g^{44} = g^{44} = 0$ und $\varphi_\alpha = 0$. Dann tritt g^{44} an der Stelle von g^{44} und φ_α an der Stelle von φ_α ein, so daß für diese Größen aus (6,1) sich die Gln. (6,8) und (6,9) ergeben werden.

¹⁴⁾ D. h. bei einem φ_α , das man nicht durch Eichtransformation auf zeitunabhängige Form bringen kann.

¹⁵⁾ Vgl. A. Papapetrou, Proc. Roy. Irish Acad. A 52, 11 (1948).

wie
aber
ver-
baue
von
für
sich
digkt

8,6)
je
Der
tet:
der-
enn
keit
and
en-
mit
nen
in-
ere
rm.
nt-
des
ab
44.
ne
t,
er-
die
ritt
aus
ige

Form an

$$\square g^{\mu\nu} = 2\kappa \Theta^{\mu\nu}$$

mit

$$\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} (\mathfrak{T}_\alpha^\nu + t_\alpha^\nu) + \mathfrak{B}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (I 3,9) und (I 3,10) und beachtet man, daß dort $\mathfrak{T}_\nu^\nu = 0$ ist, so sieht man, daß die rechte Seite von (I 3,10) mit dem ersten Term der Reihenentwicklung für die Größe

$$2\kappa (\Theta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\alpha} \mathfrak{T}_\alpha^\nu) = 2\kappa (\eta^{\mu\alpha} t_\alpha^\nu + \mathfrak{B}^{\mu\nu\alpha}{}_{,\alpha})$$

übereinstimmt.

In Einklang mit dieser Deutung der Gl. (I 5,7) steht die Tatsache, daß zu divergierenden Volumintegrale führenden Terme auf der rechten Seite dieser Gleichung eine in Wirklichkeit positiv definite Summe bilden, vgl. (I 8,1)¹⁶⁾: Das gesamte Volumintegral ist positiv und kann daher als Gesamtenergie des Gravitationsfeldes gedeutet werden. Diese Bemerkung zeigt, daß die divergierenden Volumintegrale der elektromagnetischen und der Gravitationsterme sich nicht gegenseitig aufheben können, wenn man auch die elektromagnetischen Terme in die Gl. (8,2) bringt (was man formal durch die Annahme erreichen kann, daß die Reihenentwicklung für φ_α mit einem Term der Ordnung $\frac{1}{2}$ beginnt). Die Summe aller dieser Terme wäre nämlich auch in diesem Falle positiv definit, woraus man dann wieder schließen müßte, daß die Grenzbedingung (1,3) nur dann befriedigt werden kann, wenn beide Felder im Bereich $r \geq r_0$ in Wirklichkeit zeitunabhängig sind.

¹⁶⁾ Man muß zunächst die Gl. (I, 5,7) mit -1 multiplizieren, um sie mit der Gl. (7,1) vergleichen zu können. In (7,1) ist nicht nur die Summe der zu divergierenden Volumintegrale führenden Terme, sondern auch die ganze rechte Seite positiv definit, da sie die (mittlere) Energiedichte eines elektromagnetischen Feldes in der speziellen Relativitätstheorie darstellt.

Berlin, Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften.

Bei der Redaktion eingegangen am 31. August 1957.

Über die elektrische Leitfähigkeit von Blei-II-Oxyd mit Zusätzen von Neodymoxyd

Von Horst Grunewald und Werner Neumann

Mit 1 Abbildung

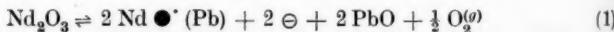
Inhaltsübersicht

Die vorliegende Arbeit behandelt die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von Blei-II-Oxyd vom Gehalt an Neodymoxyd im Temperaturgebiet von 200°C bis 500°C. Der Neodymoxydgehalt variierte dabei zwischen 0 und 2,0 Mol-%. Es wird gefunden, daß bei einer Temperatur von 200°C die elektrische Leitfähigkeit des PbO in Abhängigkeit vom Nd₂O₃-Gehalt eine sehr schwach ansteigende Tendenz zeigt, während bei 300, 400 und 500°C die elektrische Leitfähigkeit des PbO mit steigendem Nd₂O₃-Gehalt stetig abnimmt.

Einleitung

In einer vorangehenden Arbeit hatten Grunewald und Neumann¹⁾ nachgewiesen, daß ein Zusatz von Cr₂O₃ zum PbO keine Veränderung der elektrischen Leitfähigkeit des Blei-II-Oxyds zur Folge hat. Durch die stark voneinander abweichenden Ionenradien des Pb^{II}-Ions mit 1,32 Å und es Cr^{III}-Ions mit nur 0,65 Å war dort als Erklärungsmöglichkeit für die Unabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit vom Cr₂O₃-Gehalt die Möglichkeit einer zu geringen Löslichkeit des Cr₂O₃ im PbO-Kristall erwogen worden, die zur Ausbildung eines rein mechanischen Gemenges von PbO und Cr₂O₃ an Stelle der Bildung einer Mischphase mit Substitutionsstörstellen Cr \bullet° (Pb) führen könnte. Zur Entscheidung dieser Frage wurde die Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit von gesinterten PbO-Proben vom Gehalt an Neodymoxyd untersucht. Auf Grund der sehr guten Übereinstimmung der Ionenradien (Pb^{II} = 1,32 Å, Nd^{III} = 1,33 Å) ist hier von vornherein mit einer sehr weitgehenden Bildung von Substitutionsstörstellen vom Typus Nd \bullet° (Pb) zu rechnen.

Nimmt man eine reine Elektronenleitung im Blei-II-Oxyd an, so müßte beim Einbau von Nd₂O₃ in das PbO-Gitter für den Fall, daß PbO ein Elektronenüberschußleiter oder ein Gittereigenhalbleiter ist, gemäß der Einbaugleichung



mit steigendem Nd₂O₃-Gehalt eine Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit eintreten. Ist dagegen das Bleioxyd ein Elektronendefektleiter, so müßte

¹⁾ H. Grunewald u. W. Neumann, Z. angew. Phys. 9, 447 (1957).

sich gemäß



eine Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit mit steigendem Nd_2O_3 -Gehalt ergeben.

Herstellung der Proben und Durchführung der Messungen

Die Herstellung der Proben aus reinem Bleioxyd bzw. aus den Bleioxyd-Neodymoxyd-Mischungen und die Durchführung der Messungen erfolgte in der gleichen Weise, wie schon in der vorangehenden Arbeit¹⁾ beschrieben worden ist. Die Sintertemperatur war wiederum 600°C , die Sinterzeit betrug 4,5 Stunden. Die Sinterung erfolgte in Luft von Atmosphärendruck.

Meßergebnisse und Auswertung

Die an den $\text{PbO}/\text{Nd}_2\text{O}_3$ -Mischoxyden mit einem Nd_2O_3 -Gehalt zwischen 0 und 2 Mol-% im Temperaturbereich zwischen 200°C und 500°C erhaltenen Ergebnisse sind in Abb. 1 dargestellt. Bei 200°C ist ein schwacher Anstieg der elektrischen Leitfähigkeit des PbO mit steigendem Nd_2O_3 -Gehalt zu bemerken, der aber durchaus noch in dem bei polycristallinen oxydischen Halbleitern üblichen Schwankungsbereich liegt, so daß wir hier genau wie im Falle der $\text{PbO}/\text{Cr}_2\text{O}_3$ -Mischoxyde noch von einer Konstanz der elektrischen Leitfähigkeit sprechen wollen. Dagegen beobachtet man bei den Kurven für 300°C , 400°C und 500°C ein zwar schwaches, aber mit steigender Nd_2O_3 -Konzentration größer werdendes Absinken der elektrischen Leitfähigkeit der Mischoxyde.

Sehen wir von der 200°C -Isothermen ab, so läßt sich dieser experimentelle Befund dadurch deuten, daß man für PbO eine Stromleitung durch Defekt-elektronen wie z. B. im Falle des NiO ²⁾ annimmt. Das würde also die Gültigkeit des Einbaumechanismus für das Nd_2O_3 in das PbO -Gitter gemäß Gl. (2) bedeuten. Die Tatsache, daß die Leitfähigkeitsabnahme, die durch das zuge-setzte Neodymoxyd eintritt, nach Abb. 1 nur sehr klein und in keiner Weise mit der an anderen Elektronen-defekt-leitern gefundenen vergleichbar ist, läßt sich durch die Annahme einer Sauerstoffionen-leitung des PbO deuten, wenn man die Möglichkeit einer Zunahme der Sauerstoff-Ionenleitung mit größer werdendem Gehalt an Nd_2O_3 berücksichtigt.

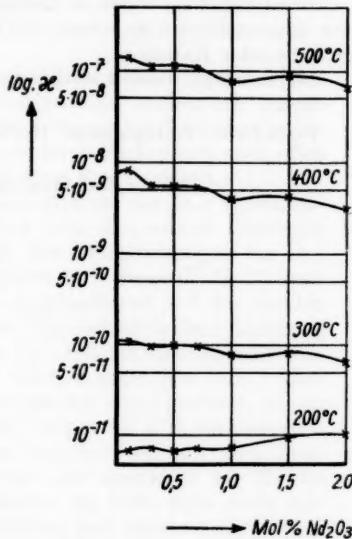


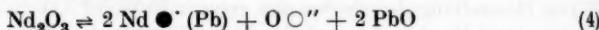
Abb. 1. Abhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit der Mischphase $\text{PbO}/\text{Nd}_2\text{O}_3$ vom Gehalt an Nd_2O_3

²⁾ K. Hauffe, Ann. Physik (6) 8, 201 (1950).

Legt man nämlich eine Eigenfehlordnung des PbO gemäß



zugrunde, so können durch das in dem Einbaumechanismus nach Gl. (2) auftretende $\frac{1}{2} O_2^{(g)}$ gemäß Gl. (3) zusätzliche Sauerstoffionen auf Zwischengitterplätzen erzeugt werden, so daß sich bei einer Überlagerung der beiden Effekte als Bruttoreaktionsgleichung



ergeben würde. Nimmt mit steigender Konzentration an Sauerstoffionen auf Zwischengitterplätzen deren Beweglichkeit ab, oder werden nicht alle der in Gl. (2) auftretenden $\frac{1}{2} O_2^{(g)}$ auf Zwischengitterplätzen eingebaut, so wird es zu keiner vollkommenen Kompensation der Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit kommen und es wird ein schwaches mit steigender Nd_2O_3 -Konzentration zunehmendes Absinken der elektrischen Leitfähigkeit der PbO/Nd_2O_3 -Mischoxyde verbleiben, wie es aus Abb. 1 im Temperaturbereich von $300^{\circ}C$ bis $500^{\circ}C$ erkenntlich ist.

Wünschenswert wären in diesem Zusammenhang Überführungsmessungen der Sauerstoffionen an reinem PbO und an PbO mit Zusätzen höherwertiger gitterfremder Kationen.

Die Arbeiten werden fortgesetzt.

Potsdam, Pädagogische Hochschule, Institut für Experimentalphysik.

Bei der Redaktion eingegangen am 22. Juni 1957.

Die i
Variation
funktion
Teilchen
gen fest

In de
mathem
anderges
hängige
gelassen.

Wie a
prinzip i
zur Bes
Wirkung
ein auss
Seite die
nicht ei
dürfen, s
der Art
über die
kugelsyn
grationsh
Teilchen
wickelter
die Lösu
Variation
Vektorfe
abzünd

Die C
zu beträ
wo das

¹⁾ J.
hier als (

²⁾ A
gemacht.

3)
2)
n-
en
4)
en
lle
so
en
D-
er
ch
en
er
k.

Ergänzung zum Variationsprinzip für klassische Feldtheorien

Von Jaroslav Pachner

Inhaltsübersicht

Die in drei Punkte zusammengefaßten physikalischen Grundlagen eines Variationsprinzips werden hier mit einem vierten ergänzt, das sich mit der funktionellen Abhängigkeit der Teilchenwirkungen von den Parametern der Teilchen befaßt. Diese Abhängigkeit wird durch die Lösung der Feldgleichungen festgelegt.

In der Arbeit I¹⁾ hat der Verfasser die physikalischen Grundlagen und den mathematischen Formalismus eines Variationsprinzips ausführlich auseinandergesetzt. Dabei hat er aber die Frage über die exakte funktionelle Abhängigkeit der einzelnen Teilchenwirkungen von ihren Parametern noch offen gelassen. In der vorliegenden Ergänzung wird diese Frage erörtert.

Wie aus der oben genannten Arbeit I bekannt, gibt uns das neue Variationsprinzip nicht nur die Feldgleichungen, sondern noch eine weitere Beziehung zur Bestimmung der Integrationskonstanten der Feldgleichungen aus den Wirkungen der einzelnen Teilchen. Auf der linken Seite dieser Gl. (I. 17) steht ein ausschließlich aus Feldgrößen gebildeter Ausdruck und auf der rechten Seite die Variation der Teilchenwirkung. Es ist klar, daß wir in diese Gleichung nicht einen jeden beliebigen Ausdruck für die Teilchenwirkung einsetzen dürfen, sondern nur einen solchen, der dieser Gleichung genügen kann. Nach der Art des zu lösenden Problems machen wir nämlich einen gewissen Ansatz über die Form der Lösung der Feldgleichungen. Setzen wir z. B. ein statisches kugelsymmetrisches unitäres Feld voraus, so kommen wir mit zwei Integrationskonstanten für jedes Teilchen aus und der Ansatz (I. 11) für die Teilchenwirkung zeigte sich hier als angemessen. Im Falle eines mehr verwickelten Feldes (rotierende Körper oder Teilchen mit Spin) enthält sicher die Lösung der Feldgleichungen mehrere Integrationskonstanten²⁾ und die Variation auf der linken Seite von Gl. (I. 17) bezieht sich nun (neben dem Vektorfeld I_μ) auf jede von ihnen. Der Ausdruck (I. 11) ist dann entsprechend abzuändern.

Die Gl. (I. 17) ist daher als eine Definitionsgleichung der Teilchenwirkung zu betrachten. Sie besagt: Es existieren gewisse Bezirke in der Raum-Zeit, wo das Oberflächenintegral einen von Null verschiedenen Wert besitzt, und

¹⁾ J. Pachner, Ann. Physik **19**, 353 (1957). Gleichungen aus dieser Arbeit werden hier als (I. . . .) bezeichnet.

²⁾ Auf diese Tatsache hat Prof. A. Papapetrou den Verfasser schriftlich aufmerksam gemacht.

innerhalb dieser Bezirke befindet sich das, was wir ein Teilchen nennen. Die Parameter der Teilchen sind nichts anders als gewisse konstante Größen, die im Oberflächenintegral vorkommen³⁾.

In der Arbeit I wurden die physikalischen Grundlagen des Variationsprinzips in drei Punkte zusammengefaßt. Wir ergänzen sie jetzt mit dem folgenden vierten:

4. Die funktionelle Abhängigkeit der einzelnen Teilchenwirkungen von den Parametern der Teilchen wird durch die Lösung der Feldgleichungen festgelegt.

Dadurch nähern wir uns dem Einsteinschen Gedanken einer reinen Feldtheorie⁴⁾: Wir trennen zwar gewisse Bezirke der Raum-Zeit durch dreidimensionale Hyperflächen von dem Feld ab, aber das erste Agens, das auch die Form der Teilchenwirkung bestimmt, ist das Feld selbst.

³⁾ Vergleiche in diesem Zusammenhang: E. Schrödinger, Space-Time Structure, Cambridge 1960, S. 99.

⁴⁾ A. Einstein, The Meaning of Relativity, 4. Aufl., Princeton 1953, S. 165.

Prag, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Bei der Redaktion eingegangen am 8. August 1957.

bei
Ein
das beid
gleichzei
ten Obj
schaften
zu desso

Die
herangez
mit der
strahl be
komponen
jedoch d
faltigkeit
eindimen
Weise ve
verfahren
90°. Bei
also auf
werden.

Die da
ist, hat
zweidime
des Licht
muß. An
ein zweid
eindimens

Für e
verfahren
dieser Ar
gestellt w

¹⁾ H.

Über Auswertungsmöglichkeiten bei einem zweidimensionalen Farbschlierenverfahren

Von U. Schmidt

Mit 14 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Ein von Wolter angegebenes zweidimensionales Farbschlierenverfahren, das beide Winkelkomponenten des von einer Schliere abgelenkten Lichtes gleichzeitig kennzeichnet, wird realisiert. Durch Vergleich mit einem bekannten Objekt — einer „Normalschliere“ — werden die zuvor unbekannten Eigenchaften einer zweidimensionalen Schliere gemessen. Ein zweites Verfahren, zu dessen Durchführung man keine Normalschliere benötigt, wird diskutiert.

Einleitung

Die älteren Schlierenverfahren, die zu quantitativen Untersuchungen herangezogen wurden, sind „eindimensionale“ Verfahren. Dabei meint man mit der Bezeichnung „eindimensional“, daß die Ablenkung, die ein Lichtstrahl bei Durchgang durch eine Schliere erfährt, nur bezüglich einer Winkelkomponente gemessen werden kann. Die Richtung des Lichtstrahles wird jedoch durch zwei Winkelkomponenten, also eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, beschrieben. Wollte man auch die zweite Komponente mit einem eindimensionalen Verfahren erfassen, mußte man die Apparatur in geeigneter Weise verändern und eine zweite Messung vornehmen. Beim Gitterblendenverfahren beispielsweise geschah dieses durch Drehen der Gitterblende um 90°. Bei Objekten, deren Schliereneigenschaften sich zeitlich ändern, können also auf diese Weise nicht beide Winkelkomponenten gleichzeitig gemessen werden.

Die daher entstehende Frage nach einem Verfahren, bei dem dieses möglich ist, hat Wolter¹⁾ positiv beantwortet. Er zeigte, daß man grundsätzlich zweidimensionale Schlieren nicht eindeutig und stetig durch die Grauskala des Lichtes kennzeichnen kann und daß man hierfür die Farben benutzen muß. Ändert man zum Beispiel Farbton und Farbsättigung, so wird dadurch ein zweidimensionales Kontinuum dargestellt, während die Grauskala nur eindimensional ist.

Für eines der von Wolter¹⁾ angegebenen zweidimensionalen Schlierenverfahren, bei denen die Farben als Kennzeichnungsmittel dienen, soll in dieser Arbeit die Benutzung zu quantitativer Analyse von Schlieren dargestellt werden.

¹⁾ H. Wolter, Zweidimensionale Farbschlierenverfahren. *Ann. Physik* (6) 8, 1 (1950).

Der Aufbau der Apparatur ist in Abb. 1 skizziert. Der für die Schlieren-kennzeichnung charakteristische Teil besteht aus einer „Schlierenplatte“ P und einem Farbdetektor $Q-A$, der unter Ausnutzung der Rotationsdispersion

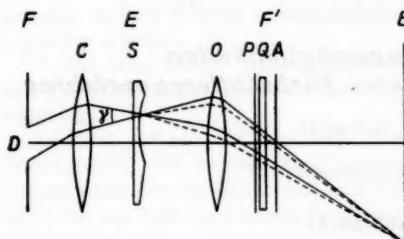


Abb. 1. Schema der Apparatur des zweidimensionalen Farbschlierenverfahrens: F = Vordere Brennebene des Kondensors C ; E = Objektiv-ebene; F' = hintere Brennebene des Objektivs O ; E' = Bildebene; D = Kondensorblende; S = Schlieren; P = Farbenplatte; Q = Quarzplatte, senkrecht zur optischen Achse ge-schnitten; A = Analysator

die Blende D durch Kondensor C und Objektiv O hindurch abgebildet. Das Blendenbild D' ist in Abb. 2 eingezeichnet.

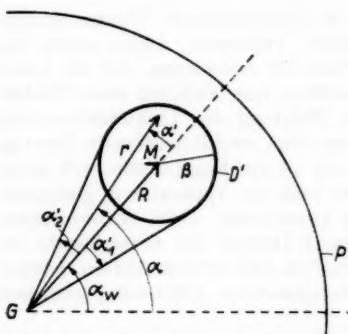


Abb. 2. Zur Berechnung der Farben in der Bildebene E' bei Anwendung einer kontinuierlichen Farbenplatte. D' = Bild der Kondensorblende auf der Farbenplatte P ; β = Durchmesser des Blendenbildes; R = dessen Auslenkung; α_w = dessen Auslenkrichtung

einen Farbdetektor $Q-A$, werden Polarisationsgrad und -richtung in be-kannter Weise in Farbsättigung und Farnton eines Farbenkreises verwan-

²⁾ $Q-A$ ist als Abkürzung für die in Abb. 1 skizzierte Anordnung Quarzplatte-Analysator gebraucht.

³⁾ Vgl. z. B. 1), S. 7.

delt³⁾. geführt

Der Zu-Lichtab

Um Farben besitze sationsr der Pola der Vo Intensit

Das ist

Bei fest gekennz Sprachg

Die „Additivität“ $\varrho(\mu) \geq 0$ ist

Dies ebene P additiv

Zur die Abb des Mit wir un platte Q in der

⁴⁾ Seine ebene der dicke Quarz

⁵⁾ A definiert Definition

⁶⁾ L von λ in tionen üb

⁷⁾ E physikal

delt³⁾. Die Berechnung dieser Farben soll im nächsten Abschnitt durchgeführt werden.

Der Zusammenhang zwischen den durch eine Schliere hervorgerufenen Lichtablenkungen und den Daten der in der Bildebene der Schlierenapparatur erscheinenden Normalfarben

Um die mathematische Form der in der Bildebene E' erscheinenden Farben zu ermitteln, betrachten wir zunächst die Abb. 1. Die Quarzplatte Q besitze die Dicke d und das spezifische Drehvermögen $\pi \cdot \nu(\lambda)$ ⁴⁾. Die Polarisationsrichtung des Analysators A bilde mit der eines bestimmten Punktes der Polarisationsplatte P den Winkel μ . Dann ist für diesen Punkt der von der Vorrichtung $P-Q-A$ hindurchgelassene Bruchteil der einfallenden Intensität $J(\lambda)$

$$\frac{1}{2} \cdot \cos^2 \{\pi d (\nu(\lambda) - \mu)\}. \quad (1)$$

Das ist eine spezielle Form der von Wolter definierten Normalfarben⁵⁾, die im allgemeinen Falle die Gestalt haben:

$$F(\nu(\lambda); I, B, \mu) = 2 I \left[\frac{1 - B}{2} + B \cos^2 \{\pi d (\nu(\lambda) - \mu)\} \right]. \quad (2)$$

Bei festem d und $\nu(\lambda)$ ⁶⁾ ist F vollständig durch die drei Parameter I , B und μ gekennzeichnet. In naheliegender Verallgemeinerung des gewöhnlichen Sprachgebrauches heißt I der Mittelwert, B die Sättigung und μ der Farbton.

Die wesentliche Eigenschaft der Normalfarben besteht darin, daß sie der „Additivitätsforderung“ genügen [7], S. 14]: Zu jeder Funktion $\varrho(\mu)$ mit $\varrho(\mu) \geq 0$; $\int \varrho(\mu) d\mu = 1$ gibt es ein $I_\varrho \geq 0$, ein $B_\varrho \geq 0$ und ein reelles μ_ϱ , so daß

$$\int \varrho(\mu) F(\nu; I, B, \mu) d\mu = F(\nu; I_\varrho, B_\varrho, \mu_\varrho) \quad (3)$$

ist. Diese Eigenschaft der Normalfarben hat zur Folge, daß die in der Bildebene E' erscheinenden Farben ebenfalls Normalfarben sind, da sie sich additiv aus Normalfarben der Gestalt (1) zusammensetzen.

Zur Berechnung der im Schlierenbild resultierenden Farben benutzen wir die Abb. 2. Die Lage des Blendebildes D' ist durch die Koordinaten R und α_ν des Mittelpunktes M festgelegt. Jeden Punkt der Farbenplatte P können wir unmittelbar mit einer Normalfarbe identifizieren, wenn wir uns Quarzplatte Q und Analysator A hinter P in der Reihenfolge $P-Q-A$ oder vor P in der Reihenfolge $A-Q-P$ angebracht denken.

⁴⁾ Spezifisches Drehvermögen $\pi \cdot \nu(\lambda)$ des Quarzes = Drehung der Polarisationsebene des Lichtes der Wellenlänge λ in Bogeneinheiten bei Durchgang durch eine 1 cm dicke Quarzsicht.

⁵⁾ Als Farbe wird das Verhältnis der durchgelassenen zur einfallenden Intensität definiert [7], S. 12], so daß $J(\lambda)$ bzw. $J(\nu)$ in den folgenden Rechnungen nicht erscheint. Definition der Normalfarben in [7], S. 10ff].

⁶⁾ Die Variable ν soll eine stetige, beschränkte und eigentlich monotone Funktion von λ in einem bestimmten λ -Intervall $(\lambda_1; \lambda_2)$ sein [vgl. 7], S. 35]. Alle späteren Integrationen über λ bzw. ν sind in diesen Grenzen auszuführen.

⁷⁾ H. Wolter, Physikalische Begründung eines Farbenkreises und Ansätze zu einer physikalischen Farbenlehre. Ann. Physik (6) 8, 11 (1950).

Unter Berücksichtigung der auf S. 204 beschriebenen Eigenschaft von P ist $\mu = \frac{\alpha}{2} \cdot \pi d$; mithin wird aus der Form (1)

$$F(v; I, B, \mu) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \left(\pi d v \cdot \frac{\alpha}{2} \right). \quad (4)$$

Daraus folgt durch Vergleich mit Gl. (2), daß $B = 1$ und $I = 1/4$ ist.

Auf jedem Strahl R liegen also Farben mit jeweils konstanten Parametern I , B und μ . Die eventuell von der Wellenlänge abhängige Absorption der einzelnen Teile der gesamten Optik ist für alle Strahlen die gleiche und kann daher in den Faktor $J(\lambda)$ hineingesteckt werden.

Hat der Radius β des Blendenbildes D' einen von Null verschiedenen Wert, so überlagern sich im zugehörigen Bildpunkt der Bildebene E' die im Gebiet von D' liegenden Normalfarben additiv. Dadurch entstehen, wie die folgenden Rechnungen zeigen werden, weißvermischte Normalfarben, d. h. $B < 1$.

Es ist anschaulich unmittelbar einzusehen, daß mit wachsender Auslenkung R die Sättigung dieser Mischfarbe zunimmt und daß im Grenzfall für R gegen Unendlich die Sättigung B gegen 1 gehen muß. Ist $R = 0$, so wird auch $B = 0$, d. h., wir erhalten die Farbe „Weiß“. Zwei auf einem Durchmesser durch G zu beiden Seiten der optischen Achse auf P liegende Punkte unterscheiden sich nämlich im Farbton um $\mu = \frac{\pi}{4 \pi d}$. Die Addition beider Farben ergibt dann

$$\begin{aligned} \cos^2 \{ \pi d (v - \mu) \} + \cos^2 \left\{ \pi d (v - \mu) - \frac{\pi}{4} \right\} &= \cos^2 \{ \pi d (v - \mu) \} \\ &+ \sin^2 \{ \pi d (v - \mu) \} = 1. \end{aligned}$$

Die Farbsättigung ist also Null.

Die Mischfarbe in der Bildebene E' , die wir im allgemeinen Falle $R = 0$ mit $F(v; I_\theta, B_\theta, \mu_\theta)$ bezeichnen wollen, wird durch das Gebietsintegral der Funktion $F(v; I, B, \mu)$ in (4) über dem Gebiet des Blendenbildes D' dar gestellt:

$$\begin{aligned} F(v; I_\theta, B_\theta, \mu_\theta) &= \int_{D'} F(v; I, B, \mu) dg : \int_{D'} dg = 2 I \int_{D'} \cos^2 \left(\pi d v - \frac{\alpha}{2} \right) dg : \int_{D'} dg \\ &= \frac{1}{2} \int_{D'} \cos^2 \left(\pi d v - \frac{\alpha}{2} \right) dg : \int_{D'} dg; \quad dg = \text{Flächenelement}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\int_{D'} dg = \pi \beta^2.$$

α ersetzen wir nun durch $\alpha_w + \alpha'$, lassen aber der Kürze halber nach der Substitution den Strich bei α wieder fort und erhalten:

$$F(v; I_\theta, B_\theta, \mu_\theta) = \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2 \left(\pi d v - \frac{\alpha_w + \alpha}{2} \right) r dr d\alpha : \pi \beta^2.$$

Zur Ausführung der Integration unterteilen wir nun in zwei Fälle, je nachdem der Durchstoßpunkt G der optischen Achse außerhalb D' oder innerhalb D' liegt (vgl. Abb. 2). Wir führen hierzu die Abkürzung $k = \frac{\beta}{R}$ ein. Wir be-

komme

und für

Die ele
soll hi

mit

und

Der V
liefert
für k

für K

Die
vom C
freiheit
sorbiert
in (6) uFür
diesen
Farbta
GrößeSättig
darge
jenige
platte
P erg

platte

Ende

kommen dann im Falle $k < 1$ das Integral

$$F(\nu; I_\varrho, B_\varrho, \mu_\varrho) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\nu} \cos^2 \left(\pi d\nu - \frac{\alpha_w + \alpha}{2} \right) r dr d\alpha : \pi \beta^2$$

und für $k > 1$

$$F(\nu; I_\varrho, B_\varrho, \mu_\varrho) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\nu} \cos^2 \left(\pi d\nu - \frac{\alpha_w + \alpha}{2} \right) r dr d\alpha : \pi \beta^2.$$

Die elementare aber etwas langwierige Ausrechnung dieser beiden Integrale soll hier übergegangen werden. Man erhält schließlich

$$F(\nu; I_\varrho, B_\varrho, \mu_\varrho) = \frac{1}{2} \left[\frac{1-p}{2} + p \cdot \cos^2 \left(\pi d\nu - \frac{\alpha_w}{2} \right) \right]$$

mit

$$p = \frac{1}{3\pi} [(1-k^{-2}) K + (1+k^{-2}) E] \quad \text{für } k < 1^8)$$

und

$$p = \frac{1}{3\pi} [(k^{-1}-k) K + (k^{-1}+k) E] \quad \text{für } k > 1.$$

Der Vergleich dieser Ausdrücke mit der Normalform (2) einer Normalfarbe liefert das Ergebnis:

für $k < 1$

$$I_\varrho = \frac{1}{4}; \quad B_\varrho = \frac{4}{3\pi} [(1-k^{-2}) K + (1+k^{-2}) E]; \quad \mu_\varrho = \frac{\alpha_w}{2\pi d}; \quad (6)$$

für $K > 1$

$$I_\varrho = \frac{1}{4}; \quad B_\varrho = \frac{4}{3\pi} [(k^{-1}-k) K + (k^{-1}+k) E]; \quad \mu_\varrho = \frac{\alpha_w}{2\pi d}. \quad (7)$$

Die Formeln (6) und (7) zeigen, daß der Mittelwert I_ϱ der Mischfarbe nicht vom Charakter der Schliere abhängt. Hierbei setzen wir die Absorptionsfreiheit der Schliere voraus. Sollte diese Annahme nicht erfüllt sein und absorbiert die Schliere den Bruchteil A der auffallenden Intensität, so haben wir in (6) und (7) für I_ϱ einfach zu setzen:

$$I_\varrho = \frac{1}{4} \cdot A.$$

Für die in dieser Arbeit untersuchten Schlieren galt stets $A = 1$. Von diesen wurden also nur Farbton und Farbsättigung beeinflußt. Während der Farbton dem Polarwinkel α_w der Ablenkung direkt proportional ist, geht die Größe des Ablenkungsbetrages $R = \beta k^{-1}$ in komplizierterer Weise in die Sättigung B_ϱ ein. Der Zusammenhang zwischen B_ϱ und k ist in Abb. 4 dargestellt. Die Diskussion dieser Kurven geschieht, nachdem wir auch diejenigen Kurven berechnet haben, die sich bei Anwendung einer „Farbsektorplatte“ P_s anstatt der bisher betrachteten „kontinuierlichen Farbenplatte“ P ergeben.

Die Bezeichnungen „Farbsektorplatte“ und „kontinuierliche Farbenplatte“ fassen wir unter dem Namen „Farbenplatte“ zusammen.

⁸) K und E sind vollständige elliptische Integrale, tabelliert z. B. in „Jahnke-Emde“, 3. Aufl., S. 54, 56.

Eine Farbsektorplatte, wie sie für das im nächsten Abschnitt beschriebene Experiment benutzt wird, ist in Abb. 3 skizziert. Wir wollen die bei Verwendung einer solchen Platte entstehenden Mischfarben berechnen. Die Anzahl der vom Blendenbild D' überdeckten Sektoren, die alle den gleichen Öffnungswinkel α_0 besitzen sollen, möge N sein. Dann setzt sich die Mischfarbe aus N Farben $\cos^2(\pi dv - \pi d\mu_i)$ additiv zusammen. Jede von ihnen ist dabei mit einem Gewichtsfaktor g_i zu versehen, der die Größe des von D' überdeckten Sektorgebietes angibt:

$$F(v; I_e, B_e, \mu_e) = \sum_i g_i \cos^2\left(\pi dv - \frac{\alpha_i}{2}\right). \quad (8)$$

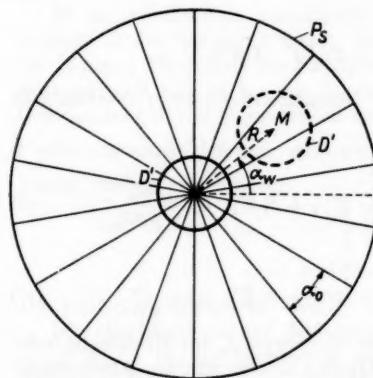
Die g_i lassen sich als Teilstücke einer Kreisfläche elementar berechnen. Die α_i kennzeichnen den Farbton eines jeden von D' überdeckten Farbsektors und sind von demselben willkürlich gewählten Nullstrahl aus zu zählen wie α_w (Abb. 3). Dieser Winkel α_w , der die relative Lage des Blendenbildes von D' zu den Farbsektoren angibt, braucht nicht den ganzen Winkelbereich von 0 bis 2π zu durchlaufen. Verschieben wir nämlich das Blendenbild um den Öffnungswinkel α_0 der Farbsektoren bei konstantem R , so bedeutet das in (8) die Ersetzung von $\alpha_i/2\pi d$ durch $(\alpha_i + \alpha_0)/2\pi d$. Während der Überführung der Summe in Gl. (8) in die Normalform (2) ziehen wir $\alpha_0/2\pi d$ zu v hinüber. Es ist unmittelbar zu erkennen, daß dann statt der Normalfarbe $F(v; I_e, B_e, \mu_e)$ die Normalfarbe $F(v; I_e, B_e, \mu_e + \frac{\alpha_0}{2\pi d})$ entsteht. Wir können also den Variationsbereich von α_w zunächst auf 0 bis α_0 einschränken. Er läßt sich aber noch weiter auf 0 bis $\alpha_0/2$ verkleinern. Wie man nämlich aus den ersieht, treten in Gl. (8) alle Kombinationen von vorkommenden g_i -Werten zweimal auf, wenn α_w bei konstantem R um α_0 variiert.

Abb. 3. Farbsektorplatte P_s . Die Platte besteht aus 18 Sektoren. Jeder Sektor erscheint hinter einem Farbdetektor in konstanter Färbung. Nach einem Umlauf wird der ganze Farbenkreis einmal durchlaufen

Symmetrieverhältnissen der Abb. 3 erteilt, treten in Gl. (8) alle Kombinationen von vorkommenden g_i -Werten zweimal auf, wenn α_w bei konstantem R um α_0 variiert.

Befindet sich in der Mitte der Farbsektorplatte ein undurchsichtiges Kreisscheibchen — ein „Stopperscheibchen“ —, so ist die Rechnung für die g_i etwas zu modifizieren. Aus einem am Schluß des Abschnittes erörterten Grunde wurde sie nur für ein einziges α_w , aber verschiedene Verhältnisse β/a von Blendenbildradius zu Stopperscheibenradius bei kontinuierlich variiertem R durchgeführt.

Die Ergebnisse der Rechnungen zu den Formeln (6), (7) und (8) sind in den Abb. 4, 5 und 6 dargestellt. Sie zeigen, daß bei großem k , also kleiner Ablenkung des Blendenbildes D' durch die Schlieren, in allen Fällen die Sättigung B_e der Ablenkung proportional ist. Mit abnehmendem k verlaufen die Kurven



flacher; Meßfehler an B_0 wirken sich stärker aus. Für großes k kann die Empfindlichkeit durch Anbringen des Stopperscheibchens gesteigert werden. Sie wird um so größer, je mehr dessen Radius wächst und dem des Blenden-

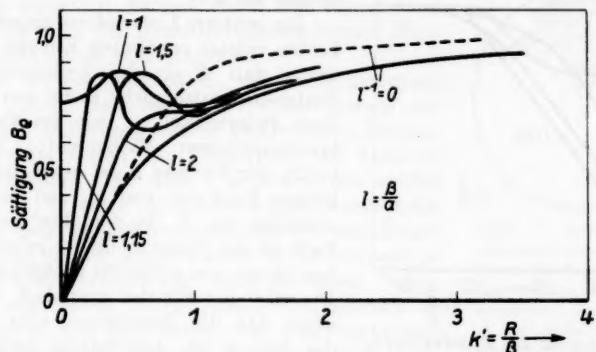


Abb. 4. Normalfarbensättigung B_0 in Abhängigkeit von der relativen Auslenkung $k = k^{-1} = R/\beta$ des Blendenbildes D' beim zweidimensionalem Farbschlierenverfahren. Ausgezogene Kurven: B_0 bei Verwendung einer Farbsektorplatte mit 18 Sektoren; gestrichelte Kurve: B_0 bei Verwendung einer kontinuierlichen Farbenplatte. a = Radius des in der Mitte der Farbenplatte angebrachten Stopperscheibchens. β = Radius des Bildes D' der Kondensorblende

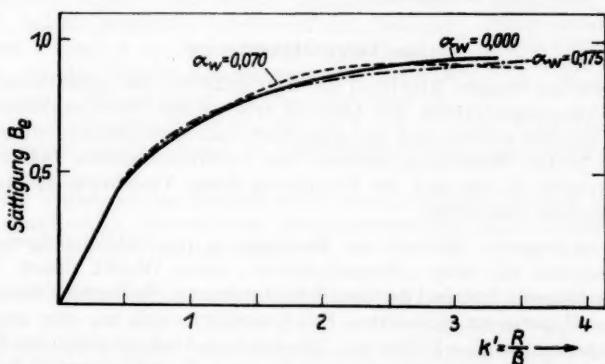


Abb. 5. Normalfarbensättigung B_0 bei Anwendung einer Farbsektorplatte in Abhängigkeit von α_w (α_w : vgl. Abb. 3)

bildes D' sich nähert. Im Grenzfall $a = \beta$ wird sie beliebig groß, während der Meßbereich dabei natürlich Null wird.

Charakteristisch für das Verfahren mit Stopperscheiben ist, daß für ein gewisses Teilgebiet der Zusammenhang zwischen B_0 und k sogar zweideutig wird. Vermeiden läßt sich das nur, wenn das Stopperscheibchen entfernt wird. Die für diesen Fall gezeichneten Kurven verlaufen im ganzen Meßbereich monoton. Die Unterschiede der Sättigung B_0 bei Anwendung

einer Farbsektorplatte P_s und einer kontinuierlichen Farbenplatte P sind vor allem bei großem k nicht sehr stark, obwohl die 18 Sektoren von P_s

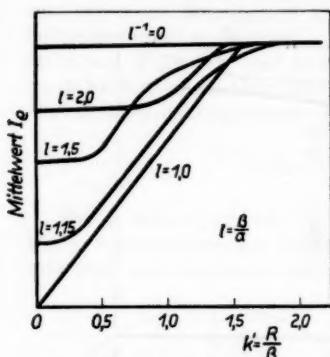


Abb. 6. Änderung des Mittelwertes I_q der Normalfarben im Farbschlierenverfahren bei Benutzung eines Stopperscheibchens. Bezeichnungen wie in Abb. 4

hingewiesen (Abb. 6). I_q ist nur für $a = 0$ konstant. In den anderen Fällen ist I_q nur stückweise konstant.

Das Vergleichsverfahren

Nachdem im vorigen Abschnitt die Eigenschaften des zweidimensionalen mit den Polarisationsfarben des Quarzes arbeitenden Schlierenverfahren im einzelnen erörtert worden sind und gezeigt ist, daß es eine eindeutige Kennzeichnung beider Winkelkomponenten von zweidimensionalen Schlieren gestattet, können wir uns nun der Benutzung dieses Verfahrens zu quantitativen Messungen zuwenden.

Eine naheliegende Methode zur Bestimmung von Schliereneigenschaften ist der Vergleich mit einer „Normalschlieren“, einem Objekt, dessen Ablenkrichtungen bekannt sind und den gesamten benötigten Meßbereich überdecken. In dem im Experiment realisierten Fall handelte es sich um eine langbrennweite Sammellinse ($f = 3370$ mm). Die durch sie hindurchgehenden Strahlen repräsentieren mit ihren Ablenkungen in zwei Koordinatenrichtungen ein zweidimensionales Kontinuum. Die Linsenfläche erscheint daher bei Abbildung mit der in der Einleitung beschriebenen Schlierenapparatur angefärbt, und zwar von ihrem Mittelpunkt zum Rande hin in zunehmender Farbsättigung entsprechend wachsender Ablenkung. Da man die Ablenkung durch eine Linse kennt, hat man zwischen den Farben am Bildort und den Schliereneigenschaften einen unmittelbaren Zusammenhang. Bei Verwendung eines Farbfilmes braucht man also nur die Farben auf der Aufnahme einer solchen Normalschlieren mit den entsprechenden Farben auf der Aufnahme des Meßobjektes zu vergleichen, um das Objekt zu analysieren.

Dieses Verfahren hat vor dem im fünften Abschnitt beschriebenen „Komponentenverfahren“ den Nachteil, daß der Vergleich zwischen Objektaufnahme und Normalschlierenaufnahme etwas mühsam ist. Vorteilhaft dagegen wirkt sich aus, daß weder die Empfindlichkeit der einzelnen Farbschichten des Filmes noch die sonstigen in der Registrierung steckenden Parameter bekannt zu sein brauchen.

Eine weitere Möglichkeit der Farbfilmeichung besteht darin, daß man die bei der jeweils verwendeten Schlierenapparatur auftretenden Normalfarben statt durch ein Testobjekt auf direktem Wege herstellt. Die Abb. 7 erläutert ein solches Verfahren. In einer undurchsichtigen Kreisscheibe befindet sich ein Sektorausschnitt, der mit Polarisationsfolie in der angedeuteten Weise bedeckt ist. Die senkrecht zueinander polarisierenden Folienstücke erscheinen hinter einem Farbdetektor — Quarzplatte plus Analysator — in komplementären Farben. Dreht sich nun die Scheibe um 2π , durchlaufen die Farben den Normalfarbenkreis zweimal. Wird die rotierende Scheibe durch den Farbdetektor hindurch auf eine Bildebene E' abgebildet, erhält jeder Punkt von E' nacheinander komplementär gefärbtes Licht, das im Zeitmittel eine weißvermischte Normalfarbe ergibt. Man ersieht unmittelbar aus Abb. 7, daß die rotierende Scheibe auf dem Radius r zwischen 0 und a in den gesättigten Farben erscheint, die der Polarisationsrichtung der Folie A entsprechen. Mit größerem Radius tritt eine zunehmende Weißvermischung ein, die bei $r = b$ in volles Weiß übergeht. Bei noch größerem Radius nimmt die Farbsättigung in komplementärer Richtung wieder zu.

Dieses Verfahren der Eichung setzt voraus, daß der Farbfilm keinen bzw. einen quantitativ übersehbaren Intermittenzeffekt zeigt. Untersuchungen hierüber werden im Institut angestellt.

Einzelheiten zur Apparatur und Herstellung einer Farbsektorplatte

Bevor nun an einem Beispiel die Durchführung einer Vergleichsmessung beschrieben wird, sollen noch Einzelheiten zur Apparatur gegeben werden.

Zur Verwendung kamen ein Kondensor mit $f = 280$ mm und ein Objektiv mit $f = 427$ mm. Das Objektfeld hatte einen Radius von 40 mm, die Kondensorblende von 1,5 mm. Vor dieser befand sich im Abstande von etwa 2 mm eine doppelt mattierte Glasscheibe zur Erzielung einer möglichst gleichmäßigen Ausleuchtung des Objektfeldes. Die senkrecht zur optischen Achse geschnittene Quarzplatte A hatte eine Dicke von 4,6 mm. Sie war gerade so bemessen, daß sich das Argument $\pi d \cdot v(\lambda)$ der Normalfarbe (2) um π änderte, wenn λ den gesamten sichtbaren Spektralbereich durchlief. Diese Wahl der Dicke der Quarzplatte ist am günstigsten, da die Empfindlichkeitsbereiche handelsüblichen Farbfilmes im wesentlichen im Sichtbaren liegen.

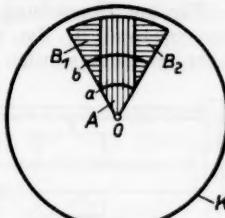


Abb. 7. Konstruktions-schemata eines „rotierenden Normalfarbsektors“ zur Herstellung von weißver-mischten Normalfarben. A = Polarisationsfolie, senkrecht polarisierend zu den Folien B_1 und B_2 . K = Metallscheibe. Wenn diese Scheibe schnell rotiert, sieht man hinter einem Farbdetektor auf dem Radius O bis a : volle Farbsättigung; auf dem Radius a bis b : zunehmend Weißvermischung bis zu reinem Weiß. Ab b wieder zunehmende komplementäre Farbsättigung

Die Farbsektorplatte, die zur Verwendung kam, bestand aus 18 Teilsektoren, deren Polarisationsrichtung von Sektor zu Sektor um 10° drehte. Nach einem ganzen Umlauf wird wieder dieselbe Polarisationsrichtung erreicht.

Für die Herstellung einer solchen Farbsektorplatte wurde Polarisationsfolie verwendet⁹⁾). Da alle Sektoren eine bestimmte Polarisationsrichtung haben müssen, wurden sie zunächst auf einen „Schnittmusterbogen“ aufgezeichnet. Die Polarisationsfolie wurde dann darauf gehetet und die vorgezeichneten Linien mit einer kleinen „Hebelschneide“ (Abb. 8) ausgestanzt.

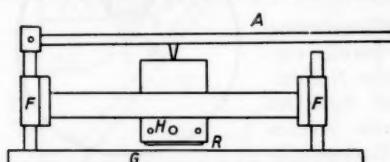


Abb. 8. „Hebelschneide“ zur Herstellung der Sektorfolien für die Farbsektorplatte. G = Grundplatte; F = Gleitführung; A = Andruckhebel; H = Rasierklingenhalterung; R = Rasierklinge

Bei einer Schnittlänge von 20 mm wichen von einer Geraden ab. Wegen der Sprödigkeit der Folie besaß die Schnittkante noch eine im Mikroskop deutlich sichtbare Struktur. Diese

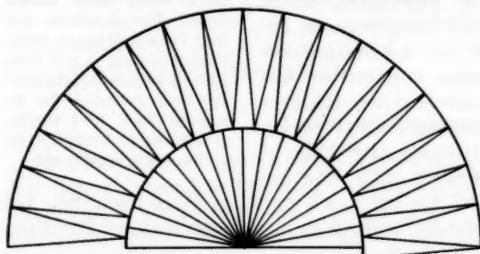


Abb. 9. „Schnittmuster“. Zerschneidet man eine gewöhnliche Polarisationsfolie nach diesem Muster, erhält man die Sektoren für eine 18teilige und eine 36teilige Farbsektorplatte

der Dicke der Quarzplatte nur ändern, wenn an anderer Stelle des Farbenkreises Sättigungsänderung in Kauf genommen wird. Man legt daher zweckmäßig die Polarisationsrichtung des Analysators A so, daß die interessierenden Teile des Meßobjektes in roten und blauen Farbtönen erscheinen.

Stanzt man aus der Polarisationsfolie die Sektoren nach dem Schnittmuster der Abb. 9, so erhält man gleichzeitig die Sektorfolien für eine Farbsektorplatte mit 18 Sektoren und für eine mit 36 Sektoren. Bei beiden Platten ändert sich die Polarisationsrichtung um π nach einem vollen Umlauf um den Plattenmittelpunkt.

⁹⁾ Herrn E. Käsemann danke ich für die großzügige Überlassung uneingedeckter Polarisationsfolie.

Eichung des benutzten Farbfilmes

Die mit einer 18teiligen Farbsektorplatte ausgerüstete, in Abb. 1 skizzierte Schlierenapparatur wurde nun zur Herstellung von Farbschlierenaufnahmen verwandt. Und zwar wurden immer abwechselnd die Normalschriere und das Meßobjekt photographiert, um zu erreichen, daß die Entwicklungsbedingungen der jeweils miteinander verglichenen Aufnahmen dieselben waren.

Zur Auswertung der Eichaufnahmen mußte zunächst die Strahlablenkung für alle Punkte der Normalschriere berechnet werden. Für jeden Radius auf der Linsenoberfläche läßt sich wegen des parallel in der Objektebene E einfallenden Lichtes die Strahlablenkung sofort angeben:

$$\alpha_r \approx \frac{r}{f}, \quad r = \text{Radius auf d. Linse}; \quad r_{\max} = 20 \text{ mm} \\ f = \text{Brennweite d. Linse}; \quad f = 3370 \text{ mm}.$$

Die Maximalablenkung am Linsenrand betrug also $\alpha_{\max} = \frac{20}{3370} = 0,00594$ (Bogenmaß). Die ihr entsprechende Normalfarbensättigung B_0 ergibt sich dann folgendermaßen: Die Eintrittsblende (Radius 1,5 mm) wird in F' im Verhältnis der Brennweiten von Kondensor C und Objektiv O mit einem Radius $\beta = 1,5 \cdot \frac{427}{280} \text{ mm}$ abgebildet. Die Randpunkte der Testlinse lenken dieses Blendenbild D' um $R = \alpha_{\max} \cdot f_0 = \frac{2}{337} \cdot 427 \text{ mm}$ aus. Das Verhältnis von $\beta/R = k$ wird damit

$$k_{\min} = \frac{1,5}{280} \cdot \frac{337}{2} = 0,902.$$

Aus Abb. 4 ist dafür eine Sättigung $B_0 = 0,700$ abzulesen.

Die Eichkurven für den Farbfilm wurden so gewonnen: Ein Mikroskop-objektiv von 20 mm Brennweite bildete die punktförmige Austrittsblende eines Monochromators im Maßstab 3:1 auf das zu vermessende Farbfilm-bild ab. Der Durchmesser der Austrittsblende betrug etwa 0,4 mm. Der durchgelassene Bruchteil der auffallenden Intensität wurde bei drei Wellenlängen gemessen und im logarithmischen Maßstab in der Darstellung in Abb. 10

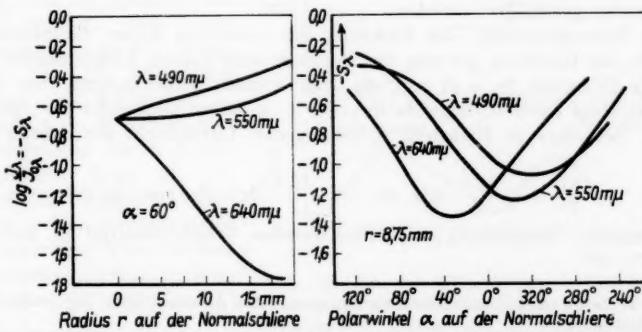


Abb. 10. Beispiele von Eichkurven einer Normalschriere: Bei drei Wellenlängen wurden die Werte $\log J - \log J_{0\lambda}$ gemessen. a) in radialer Richtung, b) auf einem Kreisring des Normalschlierenbildes. $J_{0\lambda}$ = auf das Farbdia fallende Photometerintensität

eingetragen. Auf der Ordinate ist die Größe $\lg \left(\frac{J_1}{J_{01}} \right) = -S_1$ aufgetragen, wo J_{01} und J_1 auffallende und durchgelassene Intensität am Farbfilm bei der Wellenlänge λ sind.

Derselbe Versuch ohne Film lieferte den Wert J_{01} . Die sonst übliche Berücksichtigung des Schleiers ist bei dem hier benutzten Umkehrfilm nicht möglich, da dieser an den unbelichteten Stellen voll geschwärzt ist. Die ausgewerteten Aufnahmen lagen so dicht zusammen, daß jedoch eine genau einheitliche Entwicklung für alle vermessenen Filmpunkte gesichert war.

Die drei Wellenlängen wurden so gewählt, daß die Absorptionswerte des Farbfilms bei Belichtung mit den gesättigten Farben des Normalfarbenkreises maximale Schwankungen zeigten. Daraus ergaben sich experimentell die Werte $\lambda = 490; 550; 640 \text{ m}\mu$.

Ermittlung einer Temperaturverteilung nach dem Vergleichsverfahren

Mit den so erhaltenen Eichkurven wurden die Farbwerte des Meßobjektes verglichen. Dieses war die Luft in der Umgebung eines Keramikrohres von 50 mm Länge und 11,5 mm Durchmesser, auf dem sich eine Heizwicklung befand. Es wurde bis zur dunklen Rotglut erhitzt und im Querschnitt mit der beschriebenen Farbschlierenapparatur photographiert. Als Kamera diente eine Praktika FX. Eingestellt wurde auf das der Kamera zugewandte Ende des Rohres. Belichtungszeit 0,1 sec. Filmmaterial: Agfa-Color Umkehr-Kunstlicht 15/10° DIN.

Aus einer solchen Aufnahme läßt sich der gesamte Temperaturverlauf im Bilde bestimmen. Messungen an ähnlichen Objekten sind bereits von anderen Autoren [z. B. ¹⁰⁾] als Präzisionsmessungen durchgeführt worden. Es war nicht das Ziel, diese Messungen zu wiederholen, sondern nur, zu zeigen, wie hier auf Grund der in den vorhergehenden Abschnitten erläuterten Zweidimensionalität des angewandten Schlierenverfahrens bereits eine Aufnahme zur vollen Ausmessung des Temperaturfeldes ausreicht. Aus dieser Zielsetzung heraus wurden nur einige besonders instruktive Bildpunkte vermessen. Um das näher zu beschreiben, soll zunächst der Zusammenhang zwischen der Ablenkung des Lichtstrahles von der Normalrichtung und der Temperatur geschildert werden.

Die Normalrichtung, die Richtung der optischen Achse, bezeichnen wir mit e_0 ¹¹⁾, die Richtung der von der Schliere abgelenkten Lichtstrahlen mit e und die Differenz ($e_0 - e$) mit Δe . Bei kleinen Ablenkungen, um die es sich hier stets handelt, liegt Δe in einer $x-y$ -Ebene senkrecht zur optischen Achse. Bei einer in Richtung e_0 homogenen Luftschicht der Länge l gilt dann:

$$\frac{dT}{T^2} = - \frac{12,5}{l} \cdot (\Delta e, d\vec{s}) = - \frac{12,5}{l} |\Delta e| \cdot d\vec{s} \cdot \cos(\Delta e, d\vec{s}) \quad (15)$$

T = absolute Temperatur; $d\vec{s}$ = vektorielles Wegdifferential in der $x-y$ -Ebene.

¹⁰⁾ H. Schardin, Die Schlierenverfahren und ihre Anwendungen. Erg. exakt. Natur. XX, 303 (1942).

¹¹⁾ Bezeichnungen wie in ¹²⁾.

¹²⁾ H. Wolter, Schlieren-, Phasenkontrast- und Lichtschnittverfahren. Hdb. Phys. XXIV, 555 (1956).

Die Zahl 12,5 ist durch Zusammenziehung mehrerer Konstanten, die für Luft gültig sind, entstanden¹²⁾. Integration von Gl. (15) liefert:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} = -\frac{12,5}{I} \int_{P_0}^P (\Delta e, d\vec{s})$$

$$\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} = -\frac{12,5}{I} \cdot J = K \cdot J; \quad T = \frac{1}{1 - K T_0 J} \quad (16)$$

mit $J = \int_{P_0}^P (\Delta e, d\vec{s})$ und $k = -\frac{12,5}{I}$.

Die Formel (16) besagt: Hat man in einem Punkt P_0 des Temperaturfeldes die Temperatur T_0 , so erhält man an einem beliebigen Ort P die zugehörige Temperatur T durch Ausführung des Linienintegrals $K \cdot J$ und Einsetzen dieses Wertes in (16).

Da aus der Farbe eines jeden Objektbildpunktes beide Komponenten Δe_x und Δe_y von Δe gemessen werden können, hat man damit die Möglichkeit, von einem Punkt P_0 ausgehend auf beliebigem Wege um eventuelle Hindernisse herum den Integrationsweg laufen zu lassen. Abb. 14 gibt den Verlauf der Integrationswege wieder. Um die Auswertung nicht zu kompliziert zu machen, bestanden diese aus einzelnen Geraden, d. h. $d\vec{s} = \text{const}$. Die Abb. 11 gibt als Beispiel die für Integrationsweg 1 gemessenen Absorptionswerte für die drei Meßlinien $\lambda = 490$; 550 und $640 \text{ m}\mu$ wieder. Durch Vergleich mit den Eichkurven des Testobjektes konnten dann Betrag $|\Delta e|$ und Richtung α_w von Δe (Abb. 12) ermittelt werden. Der Integrationsweg hatte die Richtung σ . In Abb. 13 ist der Ausdruck $|\Delta e| \cos(\Delta e, d\vec{s}) = |\Delta e| \cdot \cos(\alpha_w - \sigma)$ gezeichnet. Die Integration dieser Funktion lieferte dann die in Abb. 14 für Weg 1 wiedergegebene Temperaturverteilung. In gleicher Weise wurden die Temperaturwerte entlang Weg 2a und 2b bestimmt.

¹²⁾ Ableitung von (15) und (16) in ¹⁰⁾ und ¹¹⁾.

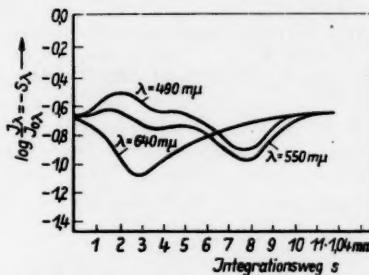


Abb. 11. $\log J_\lambda - \log J_{0,1}$ auf der Aufnahme des Meßobjektes von Abb. 14 für Weg 1. J_λ = Photometerintensitäten

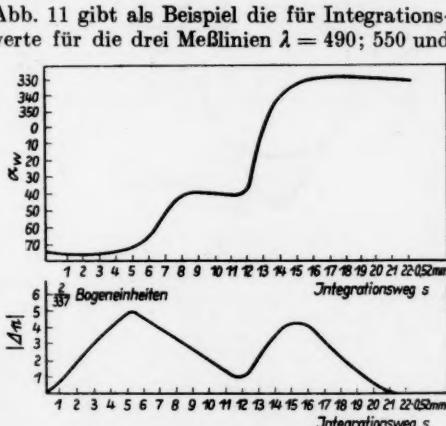


Abb. 12. Die aus Abb. 11 durch Vergleich mit Kurven der Abb. 10 gewonnenen Werte für Richtung α_w und Betrag $|\Delta e|$ des Ablenkungsvektors $\Delta e = e_0 - e \cdot e_0 =$ Normalrichtung des Lichtes in der Ebene E ; e = dessen Richtung nach Durchlaufen einer Schliere. Werte für Weg 1 der Abb. 14

Weg 2a und 2b führten am Rande des Heizrohres auf Temperaturen von 940° und 890° K. Ob diese Differenz auf einem tatsächlichen Temperaturunterschied beruht, ist nur wahrscheinlich, kann aber nicht sicher entschieden

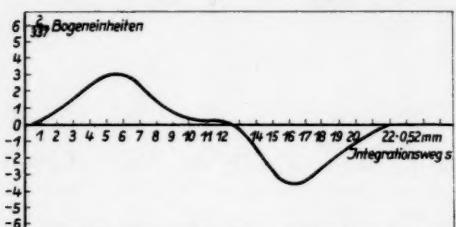


Abb. 13. Darstellung der zu Abb. 12 gehörigen Größe $|\Delta e| \cdot \cos(\Delta e, d\delta) = |\Delta e| \cdot \cos(\alpha_w - \sigma)$; σ = Richtung des Integrationsweges 1 in Abb. 14

Δe in der $x-y$ -Ebene ist. Dagegen ist er zum Beispiel beim Gitterblendenverfahren nur gleich groß, wenn Δe senkrecht zu den Gitterblenden liegt, aber größer, wenn Δe von dieser Richtung abweicht. Eine Abschätzung ergab, daß der Meßfehler bei etwa 4% lag. Er läßt sich für höhere Anforderungen verkleinern, wenn man einwandfreie und vergütete Optiken benutzt¹⁴⁾.

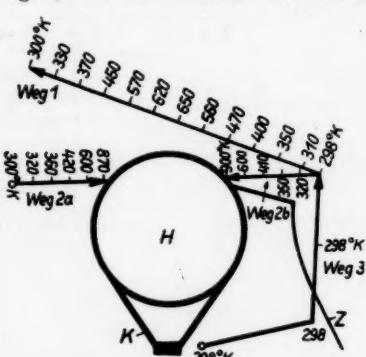


Abb. 14. Skizze der Integrationswege auf der Aufnahme des Meßobjektes. Die Werte für Δe auf Weg 3 waren überall Null und sind daher in den Darstellungen der Abb. 11 bis 13 fortgelassen. Die Zahlen geben die ermittelten Temperaturen in $^\circ$ K

$x_1; x_2; x_3$ bestimmt, die dann die drei Daten I , B und μ aus linearen Gleichungen zu berechnen gestatten. Diese Gleichungen enthalten als Konstante

¹⁴⁾ Dem im Aufbau befindlichen Institut standen zur Zeit der Versuche nur unvergütete Achromaten zweiter Wahl zur Verfügung. Bei den 10 zwischen Objekt und Bild befindlichen unvergüteten Flächen machte sich der durch Reflexionen hervorgerufene Schleier in einer Verflachung der Farbtiefe störend bemerkbar.

¹⁵⁾ H. Wolter, Zur Messung physikalischer Größen mit Hilfe der Farben. Ann. Physik (6) 17, 329 (1956).

werden, da sie nur wenig über der Grenze des Meßfehlers liegt. Dieser setzt sich aus verhältnismäßig zahlreichen Einzelfehlern zusammen, die jedoch dieselben sind wie bei den eindimensionalen Verfahren. Prinzipiell hat das zweidimensionale Verfahren sogar noch den Vorteil, daß der Fehler des Ablenkungsbetrages $|\Delta e|$ unabhängig von der Richtung α_w von

Einfahrt des Quells im bezüglichen Lichtes 3, 11 (farben einzeln)

Die verfahren tehenden zeugten Farbfilm photom

Die optisch polarisat Ein m der Lu 298° u feldes eindim

Ein darin, sitätsv Durch [H. W ein lin den im Dieses man b dessen

Das Komponentenverfahren

Ein weiteres, aber zur Zeit noch nicht realisierbares Verfahren zur Bestimmung von Schliereneigenschaften besteht darin, daß man mit Hilfe dreier Farbfilter der Durchlässigkeiten $b_1(v)$; $b_2(v)$; $b_3(v)$ von den in der Bildebene E' entstehenden Farben nach einer Theorie von Wolter¹⁵⁾ drei „Komponenten“

nur d
/ $b_1(v)$
ermitt
Zusam
daten i

Wie
Registr
Die in
ein Ma
Auswer
noch C

fahren
des Qu
bezüglic
Lichtes
3, 11 (f
farben
einzelne

Die
verfah
tehend
zeugten
Farbfilm
photom

Die
optisch
polarisat
Ein m
der Lu
298° u
feldes
eindim

Ein
darin,
sitätsv
Durch
[H. W
ein lin
den im
Dieses
man b
dessen

Ann.

nur die Integrale $\int b_i(v) \cdot \cos 2 d\tau v \cdot dv$, $\int b_i(v) \cdot \sin 2 d\tau v \cdot dv$ und $\int b_i(v) \cdot dv$, deren Werte sich mit Hilfe von drei bekannten Normalfarben ermitteln lassen. Damit ist das Problem im Prinzip wieder gelöst, denn der Zusammenhang zwischen den Normalfarbendaten I, B, μ und den Schlierendaten ist im ersten Abschnitt dargestellt.

Wie beim Vergleichsverfahren wird man jedoch auch hier als bequemes Registriermittel zeitlich veränderlicher Vorgänge den Farbfilm benutzen. Die in seinen drei Farbschichten ausgeschiedenen Farbstoffmengen sind dann ein Maß für die Daten der Normalfarbe, mit der er belichtet wurde. In die Auswertung gehen also die Eigenschaften des Filmmaterials ein, die zur Zeit noch Gegenstand von Untersuchungen des Instituts sind.

Zusammenfassung

Ein von Wolter vorgeschlagenes zweidimensionales Farbschlierenverfahren [Ann. Phys. (6) 8, 1 (1950)], das mit den Rotationsdispersionsfarben des Quarzes arbeitet, kennzeichnet die untersuchten Schlieren gleichzeitig bezüglich der beiden Winkelkomponenten des durch die Schlieren abgelenkten Lichtes eindeutig durch Normalfarben [Definition gegeben in Ann. Phys. (6) 8, 11 (1950)]. Der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften der Normalfarben und der Richtung des abgelenkten Lichtes wird berechnet und im einzelnen dargestellt.

Die Ermittlung der Schliereneigenschaften geschieht beim „Vergleichsverfahren“ dadurch, daß die in der Bildebene der Schlierenapparatur entstehenden Farben $f(v)$ mit den von einer bekannten „Normalschlieren“ erzeugten Farben verglichen werden. Als Registriermittel kann handelsüblicher Farbfilm benutzt werden, der sich mit einem geeignet eingerichteten Spektralphotometer auswerten läßt.

Dieses Verfahren wurde realisiert. Der wichtigste Teil der schlierenoptischen Einrichtung, die Farbenplatte, läßt sich aus uneingedeckter Polarisationsfolie herstellen. Einzelheiten der Arbeitsweise werden beschrieben. Ein mit dieser Schlierenapparatur als Beispiel vermessenes Temperaturfeld der Luft in der Umgebung eines Heizrohres ergab Temperaturen zwischen 298° und 950° K. Die Meßgenauigkeit ist für alle Punkte des Temperaturfeldes mindestens ebenso groß wie die maximale Meßgenauigkeit bei einem eindimensionalen Schlierenverfahren.

Eine zweite Methode zur Bestimmung von Schliereneigenschaften besteht darin, daß die in der Bildebene der Schlierenapparatur entstehende Intensitätsverteilung $f(v)$ analysiert wird, in dem man mit Hilfe von drei Filtern der Durchlässigkeiten $b_1(v)$; $b_2(v)$; $b_3(v)$ drei Komponenten von $f(v)$ bestimmt [H. Wolter, Ann. Phys. (6) 17, 330 (1956)]. Diese Komponenten liefern über ein lineares Gleichungssystem die Normalfarbendaten I, B, μ und damit aus den im ersten Abschnitt berechneten Formeln (6) und (7) die Schlierendaten. Dieses „Komponentenverfahren“ ist noch nicht praktisch durchführbar, da man bei Benutzung des Farbfilmes als Registriermittel für die Auswertung dessen Eigenschaften quantitativ kennen muß.

Dem Direktor des Instituts für Angewandte Physik der Universität Marburg Herrn Prof. Dr. H. Wolter, möchte ich an dieser Stelle für die Anregungen und fördernden Diskussionen herzlich danken.

Marburg/Lahn, Institut für Angewandte Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 24. August 1957.

Das elektrische Ersatzschema schwingender piezoelektrischer Kristallstäbchen

Von Jan Tichý

Mit 4 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Formeln für die Berechnung von Werten des elektrischen Ersatzschemas werden für Längs-, Torsions- und Biegungsschwingungen eines piezoelektrischen Stäbchens gemeinsam abgeleitet. Dabei wird der Einfluß der äußeren sowie der inneren Dämpfung und des Luftspaltes zwischen den Elektroden und dem Schwingkristall in Betracht genommen.

1. Einleitung

Die elektrischen Eigenschaften eines Schwingkristalls kann man bekanntlich in der Umgebung einer gewissen h -ten Resonanzfrequenz durch das sogenannte, in Abb. 1 dargestellte, elektrische Ersatzschema ausdrücken¹⁾. Es besteht aus einem Serienkreis vom ohmischen Widerstand R_h , Selbstinduktion L_h und Serienkapazität C_h , zu dem eine durch die Größenverhältnisse des Schwingkristalls und der Elektroden sowie durch den Wert der dielektrischen Konstante bestimmte statische Kapazität C_0 parallel geschaltet ist. Die Werte des Ersatzschemas der untersuchten Schwingungsart erhält man entweder experimentell durch elektrische Messungen oder theoretisch aus den Abmessungen des Schwingkristalls, seiner Dichte und den betreffenden, von der Orientierung des Schwingkristalls abhängigen, piezoelektrischen, elastischen und dielektrischen Konstanten. Die Kenntnis der Konstanten des elektrischen Ersatzschemas der Schwingkristalle ist sehr wichtig für ihre Anwendung zur Frequenzstabilisierung in verschiedenen Oszillatorschaltungen, in hochwertigen Selektionsmitteln und schließlich bei Entwürfen von piezoelektrischen Ultraschallgeneratoren. Umgekehrt kann man die theoretischen Formeln zur Ermittlung der Konstanten des elektrischen Ersatzschemas einer gewissen Schwingungsart zur Berechnung von piezoelektrischen oder elastischen Konstanten ausnutzen, nachdem man sie experimentell durch Messungen bestimmt hat. In diesem Fall spricht man von der sogenannten dynamischen Bestimmung der elastischen und piezoelektrischen Konstanten.

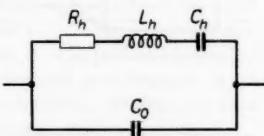


Abb. 1. Ersatzschema der h -ten Oberschwingung des Schwingkristalls

¹⁾ V. Petržilka, Piezoelektrika, Prárodovědecké vydavatelství, Praha 1951.

Über das elektrische Ersatzschema der Schwingkristalle und seine Eigenchaften ist bereits eine beträchtliche Reihe von Arbeiten veröffentlicht worden. Aber trotzdem hatte man bis vor kurzem nur die Daten für ungerade Längsschwingungen²⁾, für Torsionsschwingungen³⁾ und für spezielle Fälle von Biegungsschwingungen⁴⁾ theoretisch ermittelt. Erst Chaloupka⁵⁾ hat gezeigt, wie die Konstanten des Ersatzschemas von sowohl ungeraden als auch geraden Längs-, Torsions- und Biegungsschwingungen der piezoelektrischen Stäbchen abgeleitet werden können. Er hatte allerdings in seiner ersten Arbeit den Einfluß der inneren Reibung (Dämpfung) sowie den des möglichen Luftspaltes zwischen der Oberfläche des Schwingkristalls und der Elektroden vernachlässigt. Dagegen gelang es uns in zwei späteren Arbeiten^{6), 7)}, die genannten Resultate auch ohne diese vereinfachenden Voraussetzungen abzuleiten. In der vorliegenden Arbeit haben wir versucht, für alle möglichen Arten von einfachen Schwingungen eines unendlich dünnen Stäbchens eine gemeinsame Ableitung zu geben. Der Vollständigkeit halber haben wir außerdem auch den Einfluß der äußeren Dämpfung berücksichtigt.

2. Ableitung der Formeln zur Ermittlung der Konstanten des elektrischen Ersatzschemas

Vom Stäbchen setzen wir voraus, daß es aus einem piezoelektrischen Material der Dichte $\rho^8)$ bestehe und daß es die Form eines rechtwinkligen, nach der Abb. 2 orientierten

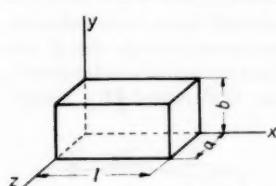


Abb. 2. Orientierung des Stäbchens

Parallelepipedes besitze. Dessen Länge l liege in Richtung der x -Achse, die Höhe a in Richtung der y -Achse und die Dicke b in Richtung der z -Achse. Die Abmessungen mögen so gewählt sein, daß das Stäbchen als sehr dünn betrachtet werden kann und gleichzeitig sei das elektrische Feld in der Richtung der z -Achse hinreichend homogen. Ein unendlich dünner Stab kann, wie es sich aus den Voigtschen Bewegungsgleichungen^[9], S. 673] ergibt, Längs-, Torsions-, sowie zwei Arten

von Biegungsschwingungen in zwei aufeinander senkrechten Ebenen ausführen. Eine Kopplung kann zwischen zwei Biegungsschwingungen und einer Torsionsschwingung und zwischen Biegungsschwingungen untereinander erfolgen. Der Fall der Kopplung wird jedoch in dieser Arbeit außer acht gelassen. Alle erwähnten Schwingungsarten, einschließlich ihrer geraden und ungeraden harmonischen Oberschwingungen, kann man durch eine der vier, in Abb. 3 dargestellten Elektrodenanordnungen anregen.

Die Bewegungsgleichungen für alle vier Arten von ungekoppelten Schwingungen des unendlich dünnen Stabes kann man, wenn nach Voigt^{[8],}

²⁾ W. G. Cady, Piezoelectricity, McGraw-Hill, New York-London 1946.

³⁾ W. P. Mason, Piezoelectric Crystals and their Application to Ultrasonics, D. van Nostrand, New York 1950.

⁴⁾ J. Keller, *Wir. Eng.* **28**, 179 (1951).

⁵⁾ P. Chaloupka, *Czechosl. Journ. Phys.* **4**, 453 (1954).

⁶⁾ P. Chaloupka, J. Tichý, *Slaboproudý obzor* **16**, 33 (1955).

⁷⁾ J. Tichý, *Czechosl. Journ. Phys.* **6**, 443 (1956).

⁸⁾ In dieser Arbeit wird das absolute elektrostatische Maßsystem benutzt.

⁹⁾ W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik, Teubner 1910.

S. 792] der Einfluß der inneren und äußeren Dämpfung berücksichtigt wird, einheitlich in der Form schreiben:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \sigma^2 \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\eta + \gamma_i \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \gamma_e \frac{\partial \eta}{\partial t} = \xi(x) K V_0 e^{i \omega t}. \quad (1)$$

Die Bedeutung der abhängigen Variablen η , der partiellen Ableitung n -ter Ordnung im zweiten Gliede und der Konstanten σ^2 bei den einzelnen Schwingungsarten ist aus der Tab. 1 ersichtlich. Die Koeffizienten γ_i und γ_e charakterisieren die äußere und innere Dämpfung und hängen von dem Material, aus dem das Stäbchen gefertigt ist, von der Viskosität der Umgebung, in der es schwingt und von seiner Bearbeitung, Befestigung usw. ab. Die rechte Seite von (1) stellt die äußere Erregungskraft bzw. das Erregungsmoment dar und ist von der Elektrodenanordnung abhängig. Die Elektroden mögen parallel zu den Seitenflächen des Kristallstabes gestellt sein und gerade bis zu den Kristallkanten reichen. Ihre Anordnung ist aus Abb. 3 ersichtlich. Bei der Anregung a) hat jede Elektrode dieselbe Fläche wie die Seitenfläche des Stäbchens, bei der Anregung b) bzw. c) sind die Elektroden durch einen vertikalen, bzw. horizontalen Abstand $2c$ bzw. $2d$ voneinander getrennt. Bei der Anregung d) stellt die Anordnung der Elektroden eine Kombination der Fälle b) und c) dar. Die Gesamtbreite des Luftspaltes zwischen den Oberflächen des Kristalls und den Elektroden bezeichnen wir mit m . Es ist unwesentlich, ob sich der Spalt nur auf der einen Seite des Stabes befindet oder auf beiden Seiten.

Legt man an die Elektroden die Wechselspannung $V_0 e^{i \omega t}$ an, so erfolgt in dem Stab in der Richtung der z -Achse eine elektrische Verschiebung

$$D = \frac{\varepsilon V_0 e^{i \omega t}}{a + \varepsilon m} = \frac{\varepsilon V_0 e^{i \omega t}}{a'}. \quad (2)$$

Dabei bedeutet V_0 die Amplitude der Wechselspannung, ω ihre Kreisfrequenz, ε die dielektrische Konstante in der Richtung der z -Achse und der Einfachheit halber wurde noch als reduzierte Stabdicke die Bezeichnung $a' = a + \varepsilon m$ eingeführt. Die periodisch variable elektrische Verschiebung (2) ruft in dem Stab auch periodisch variable elastische Spannungen hervor. Um uns ihre Verteilung entlang der Stabachse klarzumachen, denken wir uns das ganze Stäbchen durch ebene Schnittflächen senkrecht zur Stabachse in eine große Zahl kurzer Elemente eingeteilt. Innerhalb des homogenen elektrischen Feldes zwischen den Elektroden heben sich die auf die Endflächen der Elemente wirkenden elastischen Spannungen wechselseitig auf, so daß man sich die Wirkung der piezoelektrisch angeregten elastischen Spannungen durch die Wirkung fiktiver Anregungskräfte an denjenigen Stellen, wo die Elektroden enden, ersetzt denken kann. In dem Ausdruck für die

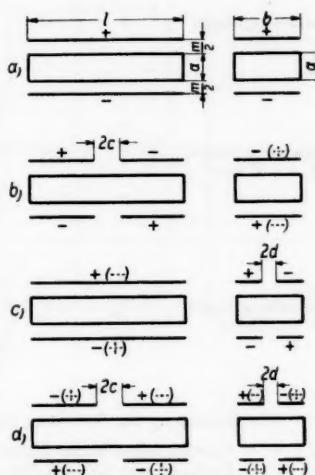


Abb. 3. Elektrodenanordnung

Tabelle 1

Schwingungsart	$\eta(x, t)$	n	σ^2	K	Randbedingungen
Längsschwingungen	u	2	$-\frac{1}{\varrho s_{11}}$	$\frac{e_{31}}{\varrho a'}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ $x=l$
Torsionsschwingungen	ϑ	2	$-\frac{1}{\varrho x_z^2 F}$	$\frac{e_{35} a \left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)}{\varrho a' x_z^2}$	$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$ $x=l$
Biegungsschwingungen in der xy -Ebene	v	4	$\frac{x_z^2}{\varrho a b s_{11}}$	$\frac{e_{38}}{\varrho a'}$	$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$ $x=l$ $\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0$ $x=l$
Biegungsschwingungen in der xz -Ebene	w	4	$\frac{x_y^2}{\varrho a b s_{11}}$	$\frac{e_{35}}{\varrho a'}$	$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0$ $x=l$ $\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_{x=0} = 0$ $x=l$

Die Bedeutung der Symbole, die im Text nicht angeführt sind:

u, v, w — Verrückungen in der Richtung der x -, y - und z -Achse.

ϑ — Drehung um die x -Achse.

s_{11} — Elastischer Koeffizient in der Richtung der x -Achse.

x_z — Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in bezug auf die Polarachse in der Richtung der x -Achse.

x_y, x_z — Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in bezug auf die Biegungssachse in der Richtung der y - und z -Achse.

Die Größe F ist von der Gestalt des Stabquerschnittes abhängig und man kann sie nur für spezielle Fälle gewinnen.

äußere Anregungskraft bzw. das Anregungsmoment auf der rechten Seite der Gl. (1) ist dieser Umstand durch die Funktion $\xi(x)$ ausgedrückt, die uns die Verteilung ihrer Wirkung entlang der Stabachse auf eine Längeneinheit des Stäbchens angibt. Im Raum, wo das elektrische Feld homogen ist, ist diese Funktion gleich Null. Ihre Werte an den anderen Stellen sind je nach der Anregungsart in der Tab. 2 angeführt. Schließlich ist auch die Bedeutung der Konstanten K , die den betreffenden piezoelektrischen Anregungskoeffizienten e_{ik} einschließt, aus der Tab. 1 ersichtlich.

Die Schwingungen des Stäbchens haben im stationären Zustand die Frequenz der Anregungskraft, sie sind jedoch gegenüber derselben infolge beider Dämpfungsarten um einen Phasenwinkel φ verschoben. Die augenblickliche Gesamtverschiebung ist durch die Superposition der Verschiebungen $\eta_h(x, t)$ aller harmonischen Oberschwingungen mit den Frequenzen ω_h ($h = 1, 2, 3, \dots$)

Tabelle 1

d- ang- en	$\psi_h(x)$	λ_h	Charakteristische Gleichung	p_z
$= 0$	$\cos \lambda_h x$	$\frac{h \pi}{l}$	$\sin \lambda l = 0$	$e_{31} \frac{\partial u}{\partial x}$
$= 0$	$\cos \lambda_h x$	$\frac{h \pi}{l}$	$\sin \lambda l = 0$	$2 e_{34} \frac{\partial}{\partial x} + e_{35} \left(y - \frac{b}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + e_{36} \left(z - \frac{a}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}$
$= 0$	$(\sinh \lambda_h l + \sin \lambda_h l) (\sinh \lambda_h x + \sin \lambda_h x)$ $(\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l) (\cosh \lambda_h x + \cos \lambda_h x)$	$\lambda_1 l = 0$ $\lambda_2 l = 4,7300$ $\lambda_3 l = 7,8532$ $\lambda_4 l = 10,9956$ $\lambda_h l \doteq$	$\cosh(\lambda l) \cos(\lambda l) = 1$	$e_{38} \frac{\partial v}{\partial x}$
$= 0$	$(\sinh \lambda_h l + \sin \lambda_h l) (\sinh \lambda_h x + \sin \lambda_h x)$ $(\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l) (\cosh \lambda_h x + \cos \lambda_h x)$	$\lambda_1 l = 0$ $\lambda_2 l = 4,7300$ $\lambda_3 l = 7,8532$ $\lambda_4 l = 10,9956$ $\lambda_h l \doteq$	$\cosh(\lambda l) \cos(\lambda l) = 1$	$e_{35} \frac{\partial w}{\partial x}$
$= 0$		$(2 h - 1) \frac{\pi}{2}$		

gegeben und man kann sie in der Form

$$\eta(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} A_h \psi_h(x) e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (3)$$

schreiben.

$\psi_h(x)$ bezeichnet die Eigenfunktion der betreffenden Schwingung für einen an beiden Enden kraftefreien Stab, die dem Eigenwert λ_h entspricht. Die Randbedingungen, Eigenfunktionen $\psi_h(x)$, Eigenwerte λ_h sowie die Gleichungen, durch deren Lösung man sie ermittelt, sind in unserer Tab. 1 angegeben. Die A_h sind bisher unbestimmte Konstante, die wir auf folgende Weise berechnen. Die Gl. (1), in die wir die Lösung (3) eingesetzt haben, multiplizieren wir mit der Funktion $\psi_m(x)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) und integrieren über x von 0 bis l . Führen wir noch die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} A_h \cos \varphi &= \alpha_h \\ A_h \sin \varphi &= \beta_h \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir nach entsprechender Umformung, bei der wir zur Abkürzung:

$$\sigma^2 \lambda_h^n = \omega_h^2 \quad (5)$$

schreiben, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \Sigma \{ \omega_h^2 - \omega^2 + j \omega (\gamma_e + \gamma_t \omega_h^2) \} (\alpha_h + j \beta_h) \int_0^l \psi_m(x) \psi_h(x) dx \\ = K V_0 \int_0^l \xi(x) \psi_m(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Tabelle 2

Elektrodenanordnung a			Elektrodenanordnung b		
Für		ξ	Für		ξ
$0 < x < l$	0	$0 < x < \frac{1}{2}l - c; \frac{1}{2}l - c < x < \frac{1}{2}l + c; \frac{1}{2}l + c < x < l$			0
	-1	$x = 0; x = l$			-1
	+1	$x = \frac{l}{2} - c; x = \frac{l}{2} + c$			+1
Elektrodenanordnung c			Elektrodenanordnung d		
Für		ξ	Für		ξ
$0 < x < l$	0	$0 < x < \frac{1}{2}l - c; \frac{1}{2}l - c < x < \frac{1}{2}l + c; \frac{1}{2}l + c < x < l$			0
	$\frac{1}{2}b - d < y < \frac{1}{2}b + d$	$\frac{1}{2}b - d < y < \frac{1}{2}b + d$			
	$\frac{1}{2}b + d < y < b$	$\frac{1}{2}b + d < y < b$			
$0 < y < \frac{1}{2}b - d$	0	$x = 0; x = l$	$x = 0; x = l - c; x = \frac{1}{2}l + c$	$x = 0; x = l$	-1
	+1	$x = l$	$x = \frac{1}{2}l - c; x = \frac{1}{2}l + c$	$x = \frac{1}{2}l - c$	+1
	-1	$x = l$	$0 < y < \frac{1}{2}b - d$	$x = 0; x = l$	+1

Tabelle 3

Tabelle 3

Schwingungsart	$\Psi(h)$	$\Phi_{a,b}(h)$		$T_{a,b}(h)$
		Elektrodenanordnung a und c	Elektrodenanordnung b und d	
Längsschwingungen	$\frac{l}{2}$	$-1 + (-1)^b$	$-1 - (-1)^b + 2 \cos \frac{h\pi c}{2} \cos \frac{h\pi e}{l}$	$\frac{ab e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{\varrho a'^2 \Psi(h)}$
Torsionschwingungen	$\frac{l}{2}$	$-1 + (-1)^b$	$-1 - (-1)^b + 2 \cos \frac{h\pi c}{2} \cos \frac{h\pi e}{l}$	$\frac{a^2 \left(\frac{b^2}{4} - d^2 \right) e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{\varrho a'^2 \varkappa_2^2 \Psi(h)}$
Biegungsschwingungen in der x - y -Ebene			$2 \left\{ \cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l - \sinh \lambda_h l \sin \lambda_h l + \cos \lambda_h c \right. \\ \cdot \left[\sin \frac{\lambda_h l}{2} (\sinh \lambda_h l + \sin \lambda_h l) - \cos \frac{\lambda_h l}{2} \right. \\ \cdot \left. (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l) \right] + \cosh \lambda_h c \left[\sinh \frac{\lambda_h l}{2} \right. \\ \cdot \left. (\sinh \lambda_h l + \sin \lambda_h l) - \cosh \frac{\lambda_h l}{2} (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l) \right] \right\}$	
Biegungsschwingungen in der z - x -Ebene			$2 \left\{ \cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l - \sinh \lambda_h l \sin \lambda_h l + \cos \lambda_h c \right. \\ \cdot \left[\sin \frac{\lambda_h l}{2} (\sinh \lambda_h l + \sin \lambda_h l) - \cos \frac{\lambda_h l}{2} \right. \\ \cdot \left. (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l) \right] + \cosh \lambda_h c \left[\sinh \frac{\lambda_h l}{2} \right. \\ \cdot \left. (\sinh \lambda_h l + \sin \lambda_h l) - \cosh \frac{\lambda_h l}{2} (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l) \right] \right\}$	
Biegungsschwingungen in der z - y -Ebene				$\frac{ab e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{\varrho a'^2 \Psi(h)}$

Da die Eigenfunktionen $\psi_h(x)$ allgemein orthogonale Systeme bilden¹⁰⁾, gilt für $m \neq h$

$$\int_0^l \psi_h(x) \psi_m(x) dx = 0. \quad (7)$$

Für $m = h$ setzen wir

$$\int_0^l \psi_h(x) \psi_h(x) dx = \int_0^l \psi_h^2(x) dx = \Psi(h). \quad (8)$$

Für die Berechnung des Integrals auf der rechten Seite der Gl. (6) beachten wir den Umstand, daß die Längendichte der äußeren Anregungskraft und daher auch die Funktion $\xi(x)$ vom physikalischen Gesichtspunkte aus notwendig von Null verschieden ist, wenigstens in einer kleinen ε -Umgebung der Stabenden (bei der Anregungsart a) und c)) sowie in der Umgebung der Ränder des Elektrodenspaltes (bei der Anregungsart b) und d)), wo das elektrische Feld inhomogen ist. Wir werden in dieser kleinen ε -Umgebung der Elektrodenenden nur den durchschnittlichen Wert der Funktion $\xi(x)$ für den Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ in Betracht nehmen. Mathematisch drücken wir das folgendermaßen aus: Für die Elektrodenanordnung a)

$$\int_0^l \xi_a(x) \psi_h(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ - \int_0^{\varepsilon} \psi_h(x) dx + \int_{l-\varepsilon}^l \psi_h(x) dx \right\} = \Phi_a(h) \quad (9)$$

und für die Elektrodenanordnung b)

$$\begin{aligned} \int_0^l \xi_b(x) \psi_h(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ - \int_0^{\varepsilon} \psi_h(x) dx + \int_{\frac{l}{2}-\varepsilon}^{\frac{l}{2}-c} \psi_h(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{l}{2}+c}^{\frac{l}{2}+c+\varepsilon} \psi_h(x) dx - \int_{l-\varepsilon}^l \psi_h(x) dx \right\} = \Phi_b(h). \end{aligned} \quad (10)$$

Bei den Anregungsarten c) und d) gelten die Gl. (9) und (10) in der oberen Hälfte des Stäbchens (für $\frac{b}{2} + d < y < b$). Für die untere Hälfte ($0 < y < \frac{b}{2} - d$) ist es dann notwendig, bei allen Gliedern auf der rechten Seite das Vorzeichen zu wechseln. Die Ergebnisse der angedeuteten Integration in den Gl. (8), (9) und (10), d. h. die Werte $\psi(h)$, $\Phi_a(h)$ und $\Phi_b(h)$ sind für die einzelnen Schwingungsarten in der Tab. 3 zusammengestellt.

Kehren wir jetzt zum Gleichungssystem (6) zurück, so verwandelt es sich nach Umformung in ein Gleichungssystem folgender Form

$$\{\omega_h^2 - \omega^2 + j\omega(\gamma_e + \gamma_t \omega_h^2)\}(\alpha_h + j\beta_h) = K V_0 \frac{\Phi_{a,b}(h)}{\Psi(h)}. \quad (11)$$

Die Koeffizienten α_h und β_h bestimmen wir durch Vergleich der reellen und imaginären Teile auf beiden Seiten der einzelnen Gleichungen. Das dadurch

¹⁰⁾ W. Wien, F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1910, B. 17, T. 1, S. 310.

entstandene System mit einer von Null verschiedenen Determinante, die wir mit Δ bezeichnen, lösen wir nach α_h und β_h .

Dann erhalten wir

$$\alpha_h = \frac{K V_0 \Phi_{a,b}(h) (\omega_h^2 - \omega^2)}{\Delta \Psi(h)}, \quad (12)$$

$$\beta_h = \frac{-K V_0 \Phi_{a,b}(h) \omega (\gamma_e + \gamma_i \omega_h^2)}{\Delta \Psi(h)}, \quad (13)$$

$$\Delta = (\omega_h^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 (\gamma_e + \gamma_i \omega_h^2)^2. \quad (14)$$

Die Lösung der Gl. (1) können wir schließlich in der Form

$$\eta(x, t) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\Phi_{a,b}(h) K V_0 \{\omega_h^2 - \omega^2 - j \omega (\gamma_e + \gamma_i \omega_h^2)\}}{\Delta \Psi(h)} \psi(x) e^{j \omega t} \quad (15)$$

schreiben.

Infolge des direkten piezoelektrischen Effekts ruft die mechanische Deformation in dem Stab eine piezoelektrische Polarisation hervor. Ihre Komponente p_z in der Richtung der z -Achse können wir aus der Beziehung (15) auf Grund der Voigtschen Gleichungen [1], S. 48] berechnen. Wie p_z von den elastischen Verschiebungen bei den einzelnen Schwingungsarten abhängt, zeigt die Tab. 1. Mit der piezoelektrischen Polarisation hängt auch die piezoelektrische Verschiebung zusammen, die samt der von dem periodischen Wechselfeld hervorgerufenen Verschiebung die Gesamtverschiebung D und daher auch die Verschiebungstromdichte bestimmt

$$i = \frac{\partial D}{4 \pi \partial t} = j \omega \frac{\epsilon V_0 e^{j \omega t}}{4 \pi a'} + \frac{a}{a'} \frac{\partial p_z}{\partial t}. \quad (16)$$

Den gesamten durch den Stab durchfließenden Verschiebungsstrom ermitteln wir durch zweifache Integration über die ganze Oberfläche der Elektroden. Berücksichtigen wir das Vorzeichen der Polarisation zwischen einzelnen Elektrodenpaaren und setzen wir für Δ die Beziehung (14) ein, dann können wir das Ergebnis einheitlich in der Form

$$J = \left[j \omega \frac{\epsilon (b - 2d)(l - 2c)}{4 \pi a'} + \omega \sum_{h=1}^{\infty} T_{a,b}(h) \frac{j(\omega_h^2 - \omega^2) + \omega (\gamma_e + \gamma_i \omega_h^2)}{(\omega_h^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 (\gamma_e + \gamma_i \omega_h^2)^2} \right] V_0 e^{j \omega t} \quad (17)$$

schreiben.

Die Konstante $T_{a,b}(h)$ hat eine etwas verschiedene Bedeutung je nach der Schwingungsart, der Elektrodenanordnung und der Ordnungszahl der erregten Schwingung. Ihre Werte für die einzelnen Schwingungsarten gibt die Tab. 3 an.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer auf der rechten Seite der Gl. (17) stellt uns die Summe der elektrischen Leitfähigkeiten von zwei parallel geschalteten Zweigen dar. Das erste Glied entspricht der Admittanz der statischen Kapazität C_0 der Elektroden, zwischen denen der Schwingkristall liegt; das zweite Glied stellt, wie wir nach einer eingehenderen Analyse feststellen, die Summe der Admittanzen von parallel geschalteten Serienschwingungskreisen dar, deren jeder aus einem ohmischen Widerstand R_h , der Selbst-

¹¹⁾ A. Scheibe, Piezoelektrizität des Quarzes. Th. Steinkopff, Dresden-Leipzig 1938.

induktion L_h und der Serienkapazität C_h besteht. Schematisch stellt uns das die Abb. 4 dar. Bezeichnen wir die Impedanz der statischen Kapazität mit Z_0 und die Impedanzen der einzelnen parallel eingeschalteten Serienschwingungskreise mit Z_h , dann gilt für die gesamte Impedanz Z des Systems

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_0} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{Z_h}. \quad (18)$$

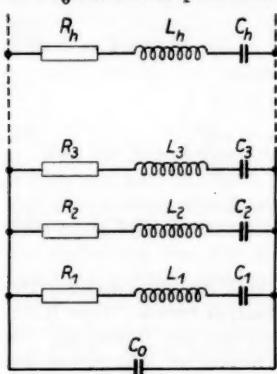


Abb. 4. Gesamtes Ersatzschema aller Oberschwingungen

trisches Ersatzschema der betreffenden h -ten Oberschwingung des Schwingkristalls bezeichnet haben.

Seine gesamte Admittanz kann man in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{Z} = j \omega C_0 + \frac{\frac{\omega}{L_h} \left[j \left(\frac{1}{L_h C_h} - \omega^2 \right) + \omega \frac{R_h}{L_h} \right]}{\left(\frac{1}{L_h C_h} - \omega^2 \right)^2 + \left(\omega \frac{R_h}{L_h} \right)^2}. \quad (19)$$

Durch Vergleich mit der Gl. (17) ergeben sich unmittelbar die gesuchten Werte des elektrischen Ersatzschaltbildes:

$$C_0 = \frac{\epsilon (b - 2d)(l - 2c)}{4\pi a'}. \quad (20)$$

$$R_h = \frac{\gamma_e + \gamma_i \omega_h^2}{T_{a,b}(h)}, \quad (21)$$

$$L_h = \frac{1}{T_{a,b}(h)}, \quad (22)$$

$$C_h = \frac{T_{a,b}(h)}{\omega_h^2}. \quad (23)$$

Der Index h gibt an, auf welche harmonische Oberfrequenz sich das Ersatzschema bezieht.

Um diese allgemein gültigen Beziehungen zu einer konkreten Berechnung des Ersatzschemas einer bestimmten Schwingungsart des piezoelektrischen Stäbchens anwenden zu können, müssen wir in diese je nach der Schwingungsart, nach der Form von Anregungselektroden und nach der Ordnungszahl der betrachteten Schwingung, entsprechende Werte einsetzen. Den betreffenden Wert ω_h erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (5) aus der Tab. 1, den Wert $T_{a,b}(h)$ nach Einsetzung für $\psi(h)$ und $\Phi_a(h)$ bzw. $\Phi_b(h)$ aus der Tab. 3.

Schließlich sind in der Tab. 4 die Formeln angegeben, welche die numerische Ermittlung von Werten des Ersatzschemas der einzelnen Schwingungen direkt ermöglichen. Allein den Ausdruck $\Phi_{a,b}(h)$ haben wir in diesen Formeln größerer Übersichtlichkeit halber unausgeführt gelassen und es ist notwendig, in einzelnen Fällen die dafür entsprechenden Werte aus der Tab. 3 einzusetzen. In der Tab. 5 sind die Formeln für das Ersatzschema der Längs-, Torsions- und Biegsungsgrundschwingungen direkt mit den ermittelten numerischen Faktoren angegeben.

Aus einer eingehenden Analyse der abgeleiteten Ergebnisse folgt, daß man durch die Elektrodenanordnungen a) und c) die ungeraden, durch die Elektrodenanordnungen b) und d) die geraden Oberschwingungen anregen kann. Bei den geraden Oberschwingungen ergibt sich aus den abgeleiteten Formeln eine interessante Abhängigkeit der Konstanten des Ersatzschemas von der Spaltbreite $2c$ zwischen den zwei Hälften der Elektroden.

3. Zusammenfassung

Diese Abhandlung faßt in einheitlicher Form die Ergebnisse aller unserer bisherigen Arbeiten, die der theoretischen Ableitung der Formeln zur Berechnung des elektrischen Ersatzschemas für die Schwin-

Tabelle 4

Schwingungsart	R_h	L_h	C_h	C_0
Längsschwingungen	$\frac{a'^2 (\varrho l^2 s_{11} \gamma_e + h^2 \pi^2 \gamma_i)}{2 a b l s_{11} e_{31}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}$	$\frac{\varrho a'^2 l}{2 a b e_{31}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}$	$\frac{2 a b l s_{11} e_{31}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{h^2 \pi^2 a'^2}$	$\frac{e b (l - 2c)}{4 \pi a'}$
Torsionschwingungen	$\frac{a'^2 (\varrho l^2 s_{2x} F \gamma_e + h^2 \pi^2 \gamma_i)}{2 a^2 \left(\frac{l^2}{4} - d^2\right)^2 l F e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}$	$\frac{\varrho a'^2 l s_{2x}^2}{2 a^2 \left(\frac{l^2}{4} - d^2\right)^2 e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}$	$\frac{2 a^2 \left(\frac{l^2}{4} - d^2\right)^2 l F e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{h^2 \pi^2 a'^2}$	$\frac{e (b - 2d) (l - 2c)}{4 \pi a'}$
Biegungsschwingungen in der $x-y$ -Ebene	$\frac{a'^2 (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l)^2 (\varrho a b l s_{11} \gamma_e + x_{2x}^2 (\lambda_h l) \gamma_i) \varrho a'^2 l (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l)^2}{a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}$	$\frac{a b e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{a'^2 x_{2x}^2 (\lambda_h l)^4 (\cosh \lambda_h l)^2 - \cos \lambda_h l)^2}$	$\frac{a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{a'^2 x_{2x}^2 (\lambda_h l)^4 (\cosh \lambda_h l)^2 - \cos \lambda_h l)^2}$	$\frac{e b (l - 2c)}{4 \pi a'}$
Biegungsschwingungen in der $x-z$ -Ebene	$\frac{a'^2 (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l)^2 (\varrho a b l s_{11} \gamma_e + x_{2z}^2 (\lambda_h l) \gamma_i) \varrho a'^2 l (\cosh \lambda_h l - \cos \lambda_h l)^2}{a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}$	$\frac{a b e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{a'^2 x_{2z}^2 (\lambda_h l)^4 (\cosh \lambda_h l)^2 - \cos \lambda_h l)^2}$	$\frac{a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2 \Phi_{a,b}^2(h)}{a'^2 x_{2z}^2 (\lambda_h l)^4 (\cosh \lambda_h l)^2 - \cos \lambda_h l)^2}$	$\frac{e b (l - 2c)}{4 \pi a'}$

Tabelle 5

Schwingungsart	R_h	L_h	C_h	C_0
Längsschwingungen $h = 1$	$\frac{a^2 (\varrho l^2 s_{11} \gamma_e + \pi^2 \gamma_i)}{8 a b l s_{11} e_{31}^2}$	$\frac{\varrho a^2 l}{8 a b e_{31}^2}$	$\frac{8 a b l s_{11} e_{31}^2}{\pi^2 a^2}$	$\frac{e b l}{4 \pi a'}$
Torsionschwingungen $h = 1$	$\frac{a^2 (\varrho l^2 x_{31}^2 F \gamma_e + \pi^2 \gamma_i)}{8 a^2 \left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)^2 l F e_{35}^2}$	$\frac{\varrho a^2 l x_{31}^2}{8 a^2 \left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)^2 e_{35}^2}$	$\frac{8 a^2 \left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)^2 l F e_{35}^2}{\pi^2 a^2}$	$\frac{e (b - 2 d) l}{4 \pi a'}$
Biegungsschwingungen in der x - y -Ebene $h = 3$	$\frac{a^2 (\varrho a b l^4 s_{11} \gamma_e + 3803 x_{31}^2 \gamma_i)}{16 a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2}$	$\frac{\varrho a^2 l}{16 a b e_{35}^2}$	$\frac{4,21 \cdot 10^{-8} a^2 b^3 l^3 s_{11} e_{35}^2}{a^2 x_{31}^2}$	$\frac{e b l}{4 \pi a'}$
Biegungsschwingungen in der x - z -Ebene $h = 3$	$\frac{a^2 (\varrho a b l^4 s_{11} \gamma_e + 3803 x_{31}^2 \gamma_i)}{16 a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2}$	$\frac{\varrho a^2 l}{16 a^2 x_{31}^2}$	$\frac{4,21 \cdot 10^{-8} a^2 b^2 l^3 s_{11} e_{35}^2}{a^2 x_{31}^2}$	$\frac{e b l}{4 \pi a'}$

gungen von unendlich dünnen piezoelektrischen Stäben gewidmet waren, zusammen und gleichzeitig erweitert sie diese um den Einfluß der äußeren Dämpfung. Mein Mitarbeiter Fr. Soška untersucht zur Zeit, inwieweit die abgeleiteten Beziehungen durch die Inhomogenität des elektrischen Feldes zwischen den Elektroden beeinflußt werden. Dadurch ist das Problem der ungekoppelten Schwingungen im großen und ganzen erschöpft und für die Zukunft ist es offenbar wünschenswert, die Aufmerksamkeit auf das Ersatzschema der gekoppelten Schwingungen zu lenken. Wie wir schon in der Einleitung erwähnt haben, wird es sich bei den unendlich dünnen Stäben hauptsächlich um die gegenseitige Kopplung der Biegungsschwingungen miteinander und um ihre Kopplung mit der Torsionsschwingung handeln. In mathematischer Hinsicht hat sich bisher Dr. A. Apfelbeck mit der Bestimmung der Frequenzen dieser gekoppelten Schwingungen erfolgreich beschäftigt. Es ist jedoch klar, daß die Lösung dieser Aufgabe mit beträchtlichen Schwierigkeiten verbunden sein wird.

Abschließend möchte ich dem korrespondierenden Mitglied der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Professor Dr. V. Petržílka, für sein reges Interesse an unseren Arbeiten über die Piezoelektrizität, sowie meinem Kollegen Fr. Soška für viele wertvolle Ratschläge meinen Dank zum Ausdruck bringen.

Liberec, Lehrstuhl für Mathematik und Physik, Technische Hochschule.

Bei der Redaktion eingegangen am 10. Juni 1957.

Über die asymptotischen Phasenverschiebungen in der Methode der Partialwellen bei Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom

Von Tomasz Gajewski

Inhaltsübersicht

Bei den bisher benutzten Potentialen des statistischen Atommodells von Thomas-Fermi wurden die für die Wirkungsquerschnitte wichtigen Phasenverschiebungen nur auf numerischem Wege berechnet. Es wird hier das unlängst von Buchdahl angegebene Potential betrachtet und gezeigt, daß mit ihm die Hennebergsche asymptotische Formel für die Phasenverschiebungen zu integrierbaren Ausdrücken führt. Die Übereinstimmung der durch die Auswertung dieser Ausdrücke erhaltenen Resultate mit den entsprechenden numerischen Werten wird in den angeführten Tabellen gezeigt.

Bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte für die elastische Streuung im kugelsymmetrischen Zentraffeld ist die Kenntnis von Phasenverschiebungen (phase shifts) der Partialwellen notwendig. Für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt nämlich die Formel

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (1)$$

wo $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ (m Masse, E Energie der gestreuten Teilchen) und die δ_l sind die erwähnten Phasenverschiebungen zwischen den einfallenden und gestreuten Partialwellen in ihrem asymptotischen Verhalten. Für die Auswertung dieser Phasenverschiebungen ist die Gestalt des Potentials des Streufeldes von entscheidender Wichtigkeit. Im statistischen Atommodell von Thomas-Fermi wird das benötigte Potential mittels einer den entsprechenden Randbedingungen genügenden Lösung der Thomas-Fermi-Gleichung

$$x^{1/2} q'' = q^{3/2} \quad (2)$$

ausgedrückt.

Bei den bisher bekannten Lösungen der Thomas-Fermi-Gleichung war die Berechnung der δ_l nur auf numerischem Wege ausführbar. Unlängst hat aber Buchdahl¹⁾ eine Lösung der Thomas-Fermi-Gleichung für ein freies neutrales Atom angegeben, die sehr genau ist und aus der mit Hilfe einer von Henneberg²⁾ erhaltenen, den großen Energiewerten entsprechenden und je größer l desto besser geltenden asymptotischen Formel

¹⁾ H. A. Buchdahl, Ann. Physik **17**, 238 (1955).

²⁾ W. Henneberg, Z. Physik **83**, 555 (1933).

hier integrierbare Ausdrücke für die δ_l gewonnen werden. Die aus diesen Ausdrücken berechneten Werte für δ_l werden dann mit den mittels der numerischen Integration erhaltenen verglichen. Gute Übereinstimmung bei genügend großen Energiewerten wird schon für ziemlich kleine Werte von l ersichtlich. Die dabei benutzte asymptotische Formel von Henneberg lautet

$$\delta_l = \int_{r_0}^{\infty} \frac{V(r) dr}{\sqrt{E - \lambda^2/r^2}}$$

mit $\lambda = l + \frac{1}{2}$; $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{E}}$, wo $V(r)$ das statistische Potential bedeutet. Für das freie neutrale Atom im statistischen Modell von Thomas-Fermi gilt

$$V(r) = \frac{Z}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right), \quad (4)$$

wo $\varphi(x)$ mit $x = -\frac{r}{\mu}$ und $\mu = 0,88534 Z^{-1/3}$ die dem freien neutralen Atom entsprechende und damit den Randbedingungen

$$\varphi(0) = 1; \varphi(\infty) = 0$$

genügende Lösung der Thomas-Fermi-Gleichung ist.

Die Buchdahlsche Lösung hat die Form

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 + Ax)(1 + Bx)(1 + Cx)} \quad (5)$$

mit $A = 0,9288$, $B = 0,1538$; $C = 0,05727$.

Die asymptotische Formel (3) für δ_l lässt sich in der dimensionslosen Schreibweise folgendermaßen darstellen

$$\delta_l = \frac{Z}{\sqrt{E}} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{x^2 - x_0^2}} \quad (6)$$

mit $x_0 = \frac{\lambda}{\mu \sqrt{E}}$. Das hier einzusetzende Buchdahlsche Potential (5) kann man wie folgt zerlegen:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 + Ax)(1 + Bx)(1 + Cx)} = \frac{\alpha}{1 + Ax} + \frac{\beta}{1 + Bx} + \frac{\gamma}{1 + Cx} \quad (7)$$

mit $\alpha = \frac{A}{(A - B)(A - C)}$, $\beta = \frac{B}{(B - C)(B - A)}$, $\gamma = \frac{C}{(C - A)(C - B)}$.

Durch Einsetzen von (7) in (6) erhält man

$$\delta_l = \frac{Z}{\sqrt{E}} \left[\alpha \int_{\frac{\lambda}{\mu \sqrt{E}}}^{\infty} \frac{dx}{(1 + Ax) \sqrt{x^2 - \frac{\lambda^2}{E \mu^2}}} + \beta \int_{\frac{\lambda}{\mu \sqrt{E}}}^{\infty} \frac{dx}{(1 + Bx) \sqrt{x^2 - \frac{\lambda^2}{E \mu^2}}} \right. \\ \left. + \gamma \int_{\frac{\lambda}{\mu \sqrt{E}}}^{\infty} \frac{dx}{(1 + Cx) \sqrt{x^2 - \frac{\lambda^2}{E \mu^2}}} \right], \quad (8)$$

woraus sich sofort ergibt

$$\delta_t = \frac{Z}{\sqrt{E}} \left[\alpha \int_{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}^{\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2}}} + \beta \int_{1 + \frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}^{\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} \right. \\ \left. + \gamma \int_{1 + \frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}^{\infty} \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - 2t + 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \right]. \quad (9)$$

Die in (9) auftretenden Integrale hängen von den Vorzeichen der Ausdrücke

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2}; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}$$

ab. Wenn $1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} > 0$ und damit für gegebene Werte von E und l desto mehr $1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} > 0$ und $1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0$, dann erhält man aus (9) nach einiger Rechnung

$$\delta_t = \frac{Z}{\lg e \sqrt{E}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2}}} \right. \\ \left. + \frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \right]. \quad (10)$$

Wenn aber $1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0$, $1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} > 0$, $1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0$, dann folgt aus (9)

$$\delta_t = \frac{2Z}{\sqrt{E}} \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \right) \\ + \frac{Z}{\lg e \sqrt{E}} \left[\frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \right]. \quad (11)$$

Bei den weiter betrachteten Werten von E und l werden wir beiden soeben erwähnten Fällen begegnen und entsprechend die Formeln (10) bzw. (11) benutzen. Es ist leicht zu ersehen, daß bei entsprechenden E - und l -Werten sich noch zwei weitere Formeln für die δ_t ergeben können. Wenn nämlich

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0,$$

dann ergibt sich aus (9)

$$\begin{aligned}
 \delta_l = & \frac{Z}{\lg e \sqrt{E}} \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda c}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \\
 & + \frac{2Z}{\sqrt{E}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \right) \right], \quad (12)
 \end{aligned}$$

und wenn

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} < 0,$$

dann folgt aus (9)

$$\begin{aligned}
 \delta_l = & \frac{2Z}{\sqrt{E}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \right) \right. \\
 & + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \right) \\
 & \left. + \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} - 1}} \right) \right]. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Man bemerkt, daß es hier wegen der Relationen

$$A > B > C$$

außer den vier besprochenen, zu den Formeln (10), (11), (12) und (13) führenden Möglichkeiten keine weiteren geben kann. Die beiden letzten Formeln (12) und (13) werden bei den von uns im nachstehenden betrachteten E - und l -Werten nicht benutzt, aber bei gewissen anderen können sie zur Anwendung kommen.

Aus der letzten Formel (13) ist insbesondere das bekannte Verschwinden der δ_l für unendlich große l -Werte zu ersehen.

Henneberg in der schon zitierten Arbeit²⁾ berechnete auf numerischem Wege die Werte von δ_l für die Streuung von Elektronen am Quecksilberatom als Streuzentrum. Er benutzte dabei die Sommerfeldsche Lösung der Thomas-Fermi-Gleichung. Bei dem Energiewert von 6400 atomaren Einheiten ($E = Z^2$) der gestreuten Elektronen lagen die Werte von l zwischen 0 und 7. Seine Resultate (δ_l numer) vergleichen wir mit den von uns mittels der Formel (10) erhaltenen (δ_l theoreti) in der folgenden Tabelle.

Tab. 1 zeigt, daß unsere Resultate für größere l -Werte immer besser mit den Resultaten von Henneberg übereinstimmen. Für alle hierbei betrachteten l -Werte und den Energiewert von 6400 atomaren Einheiten ist die Bedingung $1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} > 0$ erfüllt und damit kommt nur die Formel (10) zur Anwendung.

Als zweites Beispiel für die asymptotische Gültigkeit unserer Formeln geben wir in der Tab. 2 einen Vergleich der mit ihrer Hilfe berechneten δ_l -Werte für Uran ($Z = 92$) mit den numerischen Resultaten von Hoerni und Ibers³⁾. Die hier zu vergleichenden δ_l -Werte entsprechen der von ihnen betrachteten Energie von 11 keV (813 atomaren Einheiten).

Die drei ersten hier betrachteten l -Werte: 0, 2, 4 mit dem dabei benutzten Energiewert von 813 atomaren Einheiten genügen der Bedingung $1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} > 0$, während für alle weiteren gilt $1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0$.

Außerdem gelten für alle hier betrachteten l -Werte die Ungleichungen

$$1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} > 0, \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0,$$

so daß hier die Formel (10) für $l = 0, 2, 4$ und die Formel (11) für alle weiteren l -Werte angewandt wurden.

Es muß noch bemerkt werden, daß Hoerni und Ibers bei ihren numerischen Berechnungen die relativistische Korrektur für das statistische Potential berücksichtigt haben, die zwar klein ist, aber schon einen gewissen Einfluß auf die Resultate bei der betrachteten Energie hat. Aus der Tab. 2 ist zu erkennen, daß unsere analytischen Formeln für die asymptotischen Phasenverschiebungen δ_l gut genug mit den numerischen Ergebnissen von Hoerni und Ibers übereinstimmen. Wäre die relativistische Korrektur nicht berücksichtigt, so wäre die Übereinstimmung noch besser.

Es ist wichtig für die praktische Auswertung der Ausdrücke für die totalen Wirkungsquerschnitte, daß die in den angeführten Tabellen sichtbare befriedigende Übereinstimmung der numerischen und unserer theoretischen Werte von δ_l schon für ziemlich kleine Werte von l erzielt wird. Unsere analytischen Formeln für die asymptotischen Phasenverschiebungen scheinen demnach im Bereich der genügend großen Energiewerte für die Berechnung

³⁾ I. A. Hoerni, I. A. Ibers, Physic. Rev. 91, 1183 (1953).

der totalen Wirkungsquerschnitte sehr geeignet zu sein. Die numerischen Berechnungen sind dagegen, wie die Praxis zeigt, sehr mühsam und zeitraubend.

Herrn Dr. T. Tietz möchte ich für seine wertvollen Hinweise herzlich danken.

Łódź (Polen), Institut für theoretische Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 24. Juni 1957.

Ein Phasenkontrastmikroskop zur Messung des Phasen- und Amplitudeneinflusses isolierter Objekte

Von Ulrich Gradmann

Mit 5 Abbildungen

Inhaltsübersicht

In einem Phasenkontrastmikroskop tritt an die Stelle des Zernike'schen Phasenstreifens im Objektiv ein durchbohrtes Glimmerplättchen. Unter Verwendung weiterer polarisationsoptischer Elemente lassen sich dann die optische Dicke und die Absorption isolierter Objekte durch Elliptizitätsanalyse im Bild bestimmen. Das Prinzip wird realisiert an zwei Achromaten (45 x, NA. 0,65 und 100 x, NA. 1,30), mit denen Objekte von Breiten bis maximal 5μ vermessen werden können. Die Meßgenauigkeit hängt in komplizierter Weise von den Objektdaten ab. Sie beträgt 1° in der Phase und 1 % in der Amplitude für günstige, bis zu 8° bzw. 9 % für extrem ungünstige Objekte. Als Testobjekte dienen homogene Zaponlackstreifen und dünne Glasfäden.

1. Einleitung

Für die Messung der optischen Dicke und der Absorption mikroskopischer Objekte stand bisher kein befriedigendes Verfahren zur Verfügung. Barer¹⁾ maß zwar die optische Dicke lebender Zellen mit Hilfe des Interferenzmikroskops von Dyson²⁾, die Meßgenauigkeit ist jedoch nicht sehr groß ($\lambda/10$ ohne Photometrie), und die Absorption läßt sich auf diesem Wege überhaupt nicht bestimmen. Diese und andere Untersuchungen Barers (er maß auch den Brechungsexponenten von Zellen mit einer Immersionsmethode³⁾) zeigen aber jedenfalls deutlich, was ohnehin zu erwarten war, daß hier nämlich lohnende biologische Probleme liegen. Daher erschien ein gutes Verfahren zur Messung der optischen Dicke und der Absorption mikroskopischer Objekte erwünscht.

Grundsätzlich bietet das Phasenkontrastverfahren von Zernike eine Möglichkeit zur Messung des Phaseneinflusses auf dem Weg über die photographische Photometrie von Phasenkontrastbildern. Das Verfahren ist jedoch umständlich und ungenau. Daher versuchten mehrere Autoren (Françon und Nomarski⁴⁾, Hartley⁵⁾, Kastler und Montarnal⁶⁾, Loquin⁷⁾,

¹⁾ R. Barer, *Nature* **171**, 720 (1953).

²⁾ J. Dyson, *Proc. Roy. Soc. London (A)* **204**, 170 (1950).

³⁾ R. Barer, *Nature* **172**, 1097 (1953).

⁴⁾ M. Françon u. G. Nomarski, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230**, 1050, 1392 (1950).

⁵⁾ W. G. Hartley, *Nature* **160**, 329 (1950).

⁶⁾ A. Kastler u. R. Montarnal, *Nature* **171**, 357 (1948).

⁷⁾ M. Loquin, *Microscopie* **1**, M 47 (1948).

Osterberg⁸⁾, Osterberg und Pride⁹⁾, Taylor und Payne¹⁰⁾, dieses Verfahren mit polarisationsoptischen Mitteln zu einem Meßverfahren auszubauen, das Phasen- und Amplitudeneinfluß des Objekts zugleich liefern sollte. Bei all diesen Verfahren sind leider Polarisatoren und doppelbrechende Plättchen so kompliziert ins Objektiv eingebaut, daß eine Realisierung für hoch auflösende Mikroobjektive aussichtslos erscheint.

Nun gab aber Wolter¹¹⁾ ein ähnliches Verfahren an und realisierte es auch an einer makroskopischen Apparatur, mit dem er den Phasen- und Amplitudeneinfluß geeigneter Objekte, nämlich homogener Streifen, mit sehr hoher Genauigkeit messen konnte. In das Objektiv selbst war nur ein relativ einfaches Element einzubauen, nämlich ein durchbohrtes Glimmerplättchen, so daß es durchaus möglich erschien, das Verfahren auch auf hoch auflösende Mikroobjektive anzuwenden. Das macht sich die vorliegende Arbeit zur Aufgabe. Außerdem soll untersucht werden, wie sich neben homogenen Streifen andere, biologisch interessantere Objekte vermessen lassen.

2. Das Prinzip des Verfahrens

Abb. 1 zeigt den Aufbau des Mikroskops: Im Brennpunkt des Mikroskopkondensors (*a*) befindet sich die Lichtquellenblende (*b*), die wir als punktförmig voraussetzen. Liegt kein Objekt in der Objektebene (*c*), so wird die Blende (*b*) durch den Kondensor und das Objektiv (*d*) in die hintere Objektivbrennebene (*e*) abgebildet. Die Objektebene durchsetzt dann ein Parallelstrahlenbündel, die Lichterregung ist dort konstant, sie ist es also auch in der Bildebene (*f*). Wir normieren sie auf 1 (s. Abb. 2). Nun legen wir ein kleines isoliertes Objekt (*g*) in die Objektebene. Es habe über seine ganze Fläche konstante optische Eigenschaften, die durch eine komplexe Zahl *P* nach Phase und Amplitude erfaßt werden (s. Abb. 2). Dieselbe Lichterregung *P* herrscht dann auch im Bild.

⁸⁾ H. Osterberg, J. Opt. Soc. Amer. **37**, 726, 523 (1947).

⁹⁾ H. Osterberg u. G. E. Pride, J. Opt. Soc. Amer. **40**, 64 (1950).

¹⁰⁾ E. W. Taylor u. B. O. Payne, Nature **160**, 329 (1950).

¹¹⁾ H. Wolter, Z. Physik **140**, 57 (1955).

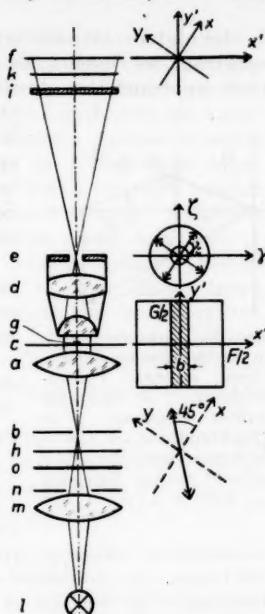


Abb. 1. Aufbau des Mikroskops. (a) Kondensor, (b) Lichtquellenblende, (c) Objektebene, (d) Objektiv, (e) Objektivbrennebene mit durchbohrtem Glimmerplättchen, (f) Bildebene, (g) Objekt, (h) Polarisator, (i) $\lambda/4$ -Glimmerplättchen, (k) Analysator, (l) Lampe, (m) Kollektor, (n) Gesichtsfeldblende, (o) Filter. Daneben vier Ebenen senkrecht zur optischen Achse mit den in ihnen liegenden Koordinatensystemen. Von oben nach unten: Bildebene (*f*); $\{x, y\}$ parallel zu den Achsen des Glimmerplättchens in (*e*); $\{x', y'\}$ mit y' -Achse parallel zum Objekt. Objektivbrennebene (*e*); $\{y, z\}$ mit z -Achse parallel zum Objekt der Breite $G/2$. Objektfeldgrenzen $-F/2 < x < F/2$, $-G/2 < y < G/2$. Ebene des Polarisators (*h*); $\{x, y\}$ parallel zu den Achsen des Glimmerplättchens in (*e*). Unter 45° dazu Polarisierungsrichtung (Doppelpfeil).

In der hinteren Objektivbrennebene entsteht ein Fraunhofer'sches Beugungsspektrum des Objekts. Es besteht aus dem nach Phase und Amplitude praktisch unveränderten direkten Bild der Blende (b), dem „Spektrum nullter Ordnung“, das also in der Bildebene (f) wieder 1 liefert, und aus dem abgebeugten Licht, den „Seitenspektren“, die im Bild zu $P-1$ interferieren; denn beide Anteile zusammen sollen ja P ergeben. (Das Spektrum nullter Ordnung ist praktisch unverändert, da das Objektfeld ja fast leer ist.)

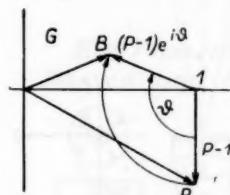


Abb. 2. Lichtterregungen in der Gaußschen Zahlen-
ebene, starker Phasen-
kontrast. 1 = Spektrum nullter
Ordnung; P = Objekteinfluss; $P-1$ =
Seitenspektren, die um θ
gedreht werden. Erregung
im Bild $B = (P-1) e^{i\theta}$

Beim einfachen Phasenkontrastverfahren bringt man nun in der Brennebene (e) einen Phasenschieber an, der die Seitenspektren gegen das Spektrum nullter Ordnung um eine Phase ϑ verdreht (Winkelvorzeichen richten sich hier und im folgenden nach dem mathematischen Drehsinn), also etwa eine im Bild der Blende durchbohrte Zaponlackfolie. Dann hat man im Bild die Lichtterregung

$$B = 1 + (P-1) e^{i\vartheta} \quad (\text{s. Abb. 2}). \quad (1)$$

Bei unserem Verfahren liegt nun in der Brennebene (e) ein doppelbrechender Phasenschieber, ein durchbohrtes Glimmerplättchen, das in seinen beiden Hauptschwingungsrichtungen die Seitenspektren um ϑ_x bzw. ϑ_y verdreht. Stellen wir einen Polarisator (h) vor der Kondensorblende parallel zur einen oder anderen Glimmerrichtung, so erhalten wir im Bild, in das wir ein Koordinatensystem $\{x, y\}$ parallel zu den beiden Glimmerrichtungen legen, die Lichtterregungen

$$B_x = 1 + (P-1) e^{i\vartheta_x} \quad (2)$$

bzw.

$$B_y = 1 + (P-1) e^{i\vartheta_y}.$$

Stellen wir den Polarisator (h) unter 45° gegen die beiden Glimmerrichtungen (und normieren nun die Gesamtintensität auf 2), so erhalten wir die beiden sich geometrisch deckenden, sonst aber verschiedenen, senkrecht zueinander polarisierten Bildern (2), die sich also zu einer Schwingungsellipse überlagern.

Orientierung, Hauptachsenverhältnis und Umlaufsinn dieser Ellipse lassen sich in der üblichen Weise mit Hilfe eines elliptischen Analystors bestimmen, der aus dem $\lambda/4$ -Glimmerplättchen (i) und dem Analysator (k) besteht. Man legt dazu das Glimmerplättchen mit seinen beiden Hauptschwingungsrichtungen parallel zu den Hauptachsen der Ellipse. Hinter dem Glimmer ist das Licht dann linear polarisiert in Richtung der einen oder der anderen Diagonalen des Rechtecks, das man der Ellipse hauptachsenparallel umschreibt. Das Licht kann dann mit dem Analysator völlig ausgelöscht werden. Man hat also zwei Stellungen des Analysators, für die das Objekt schwarz wird, sie sind die eigentlichen Meßwerte. Aus ihnen lassen sich die Daten der Ellipse, und daraus lassen sich wieder die Objekteigenschaften P berechnen. Das ist bei Wolter¹¹⁾ ausführlich behandelt.

Diese einfachen Betrachtungen gelten jedoch nur für schmale Objekte, genauer gesagt für

$$b A_t \ll \lambda, \quad (3)$$

wo b die Objektbreite, A_i die Apertur des Lochs im Glimmer und λ die Vakuumwellenlänge des benutzten Lichtes ist; man spricht dann von „strengem Phasenkontrast“. Wolter¹¹⁾ konnte (3) erfüllen, indem er bei seiner makroskopischen Apparatur einen schmalen Spalt statt einer Lochblende als Lichtquellenblende benutzt; dieser Spalt konnte dann kleinere Aperturen haben. Wolter mußte aber seine Streifenobjekte parallel zu diesem Spalt legen. Da eine solche Orientierung in der mikroskopischen Praxis oft nicht möglich ist, mußte am Mikroskop eine Lochblende verwendet werden. Außerdem bedingen die kleinen Brennweiten der Mikroobjektive große Aperturen A_i des Lochs im Glimmer (seiner Größe sind nach unten technische Grenzen gesetzt). Daher konnte (3) hier nicht mehr erfüllt werden. Damit traten Komplikationen auf, wie sie für einfache Phasenkontrastbilder von Menzel¹²⁾, Schuster¹³⁾ und Wolter¹⁴⁾¹⁵⁾ diskutiert wurden. Bei einem 45fachen Objektiv der N. A. 0,65 etwa genügt die einfache Theorie nur für Objekte, die bis zu 1μ breit sind. Bei 1μ liegt das Auflösungsvermögen des Objektivs!

Da diese Fragen entscheidend für die Konstruktion der Apparatur sind, sollen sie zunächst im folgenden Abschnitt in eingehender Analyse geklärt werden, bevor die Apparatur beschrieben wird. Diese Analyse wird zugleich die Möglichkeit geben, den Meßbereich wesentlich zu erweitern.

3. Eingehende Theorie für breite Objekte

Wir setzen auch hier wieder eine punktförmige Lichtquellenblende voraus (s. Abb. 1). Liegt dann in der Objekt ebene, in die wir ein Koordinatensystem $\{x', y'\}$ legen wollen, das mit dem System $\{x, y\}$ des Glimmers in keinerlei Beziehung steht, ein Objekt, dessen Phasen- und Amplitudeneinfluß durch eine komplexe Objektfunktion $O(x', y')$ beschrieben werden kann, so erhält man in der hinteren Objektivbrennebene das Fraunhofersche Beugungsspektrum

$$E(\gamma, \zeta) = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-G/2}^{G/2} O(x', y') e^{-2\pi i(\gamma x' + \zeta y')} dy' dx'. \quad (4)$$

Dabei benutzen wir als Koordinaten in der Objektivbrennebene die Richtungsvariablen

$$\begin{aligned} \gamma &= n \frac{\cos \alpha}{\lambda}, \\ \zeta &= n \frac{\cos \beta}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5)$$

wo n der Brechungsindex im Raum zwischen Objekt und Objektiv ist, α und β die Winkel sind, die ein Strahl dort mit der x' - bzw. der y' -Achse bildet, und λ die Vakuumwellenlänge des benutzten Lichtes ist. Die Grenzen des Objektfeldes nehmen wir zunächst an als

$$\begin{aligned} -F/2 &< x' < F/2, \\ -G/2 &< y' < G/2. \end{aligned} \quad (6)$$

¹²⁾ E. Menzel, Optik 5, 385 (1949).

¹³⁾ K. Schuster, Jenaer Jahrbuch 1951, S. 22.

¹⁴⁾ H. Wolter, Ann. Physik (6) 7, 33 (1950).

¹⁵⁾ H. Wolter, Ann. Physik (6) 7, 147 (1950).

In der Brennebene wird das Licht nun durch ein Glimmerplättchen beeinflußt, das im Zentrum ein kreisrundes Loch trägt. In die Mitte des Lochs fällt das Bild der Lichtquellenblende. Das Licht wird also mit einer „Eingriffsfunktion“ $Q(\gamma, \zeta)$ multipliziert, die hier die Form hat

$$Q(\gamma, \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } \gamma^2 + \zeta^2 < \gamma_a^2 \\ e^{i\theta} & \text{für } \gamma_a^2 < \gamma^2 + \zeta^2 < \gamma_b^2 \\ 0 & \text{für } \gamma_b^2 < \gamma^2 + \zeta^2. \end{cases} \quad (7)$$

(Wir spezialisieren zunächst für lineare Polarisation in x - oder y -Richtung [Glimmersystem!] und lassen einfacheitshalber die Indizes weg.) $\gamma, \lambda = A_i$ ist die numerische Apertur des Lochs im Glimmer, $\gamma_a \lambda = A_a$ die des Objektivs.

Im Bild erhält man dann eine Lichterregung

$$B(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} E(\gamma, \zeta) Q(\gamma, \zeta) e^{2\pi i(\gamma x' + \zeta y')} d\gamma d\zeta. \quad (8)$$

Wir müssen nun auf besondere Objektformen spezialisieren.

a) Eindimensionales Streifenobjekt

Als erstes Objekt behandeln wir einen homogenen, unendlich langen Streifen der Breite b (s. Abb. 1), der symmetrisch zur y' -Achse liegt. Seine Objektfunktion ist

$$O(x') = \begin{cases} P = P_0 e^{i\varphi_0} & \text{für } |x'| < b/2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (9)$$

Dabei ist P eine feste komplexe Zahl. Einsetzen in (4) liefert

$$E(\gamma, \zeta) = \int_{-G/2}^{G/2} e^{-2\pi i \zeta y'} dy' \left\{ \int_{-F/2}^{F/2} e^{-2\pi i \gamma x'} dx' + (P-1) \int_{-b/2}^{b/2} e^{-2\pi i \gamma x'} dx' \right\} \quad (10)$$

Nun ist wegen $\int_{-\infty}^{\infty} F \frac{\sin \pi F \gamma}{\pi F \gamma} d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1$

$$\int_{-F/2}^{F/2} e^{-2\pi i \gamma x'} dx' = F \frac{\sin \pi F \gamma}{\pi F \gamma} = \delta(\gamma, 0). \quad (11)$$

Man erhält

Lassen wir also die Grenzen F und G unseres Gesichtsfeldes sehr groß werden, so erhalten wir

$$E(\gamma, \zeta) = \delta(\zeta, 0) \left\{ \delta(\gamma, 0) + (P-1) b \frac{\sin \pi b \gamma}{\pi b \gamma} \right\}.$$

Das Spektrum liegt also ganz auf der ζ -Achse. Als Bildfunktion erhalten wir dann aus (8) unter Beachtung von (7)

$$B(x') = e^{i\theta} \int_{-\gamma_a}^{\gamma_a} \left\{ \delta(\gamma, 0) + (P-1) b \frac{\sin \pi b \gamma}{\pi b \gamma} \right\} e^{2\pi i \gamma x'} d\gamma + (1 - e^{i\theta}) \int_{-\gamma_b}^{\gamma_b} \left\{ \delta(\gamma, 0) + (P-1) b \frac{\sin \pi b \gamma}{\pi b \gamma} \right\} e^{2\pi i \gamma x'} d\gamma.$$

Wir führen nun nach Wolter¹⁴⁾ eine neue Funktion ein

$$\Pi(u, v) = \frac{1}{\pi} \int_{-u}^u \frac{\sin u}{u} e^{ivu} du. \quad (12)$$

Speziell gilt (s. Wolter¹⁴⁾)

$$\begin{aligned} \Pi(\infty, v) &= \begin{cases} 1 & \text{für } |v| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } |v| = 1 \\ 0 & \text{für } |v| > 1 \end{cases} \\ \Pi(u, 0) &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(u), \end{aligned} \quad (13)$$

setzen wir ferner

$$\begin{aligned} b &= u \\ \frac{2x'}{b} &= v, \end{aligned} \quad (14)$$

so erhalten wir die Bildfunktion

$$B(v) = 1 + (P-1) e^{i\theta} \Pi(u_a, v) + (P-1) (1 - e^{i\theta}) \Pi(u_i, v). \quad (15)$$

Für $u_a \rightarrow \infty$, $u_i \rightarrow 0$ (gute Auflösung, verschwindendes Produkt aus Objektbreite und Apertur des Lochs im Glimmer) geht (15) in (1) über, wie man mit Hilfe von (13) leicht sieht.

Durch einfache Umformung gewinnt man aus (15)

$$B(v) = \{1 + (P-1) \Pi(u_i, v)\} \left\{ 1 + e^{i\theta} (P-1) \frac{\Pi(u_a, v) - \Pi(u_i, v)}{1 + (P-1) \cdot \Pi(u_i, v)} \right\}. \quad (16)$$

Steht der Polarisator (h) unter 45° gegen die x - und die y -Achse, so erhält man also die beiden parallel zu den Achsen polarisierten Bildfunktionen

$$\begin{aligned} B_x(v) &= C \{1 + e^{i\theta_x} (P' - 1)\} \\ B_y(v) &= C \{1 + e^{i\theta_y} (P' - 1)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

wobei $C = \{1 + (P-1) \Pi(u_i, v)\}$ nicht von der Polarisationsrichtung abhängt. Durch Vergleich von (17) mit (2) sieht man, daß man durch Auswertung nach Wolter¹¹⁾ unter der Voraussetzung strengen Phasenkontrasts zunächst ein fehlerhaftes P' gewinnt, das aber mit P in der einfachen Relation steht

$$(P' - 1) = (P-1) \frac{\Pi(u_a, v) - \Pi(u_i, v)}{1 + (P-1) \Pi(u_i, v)}. \quad (18)$$

Man gewinnt also durch Korrektur das wahre

$$P = \frac{\{\Pi(u_a, v) - 1\} - P' \{\Pi(u_i, v) - 1\}}{\Pi(u_a, v) - P' \Pi(u_i, v)}. \quad (19)$$

Für eine vernünftige Messung muß das Objekt gut aufgelöst sein ($u_a \gg 1$, praktisch genügt etwa $u_a > 2\pi$). Ferner soll $B(v)$ für $|v| < 1$ praktisch konstant sein. Diese Forderung überträgt sich dann auf

$$\Pi(u_i, v) = \frac{1}{\pi} \int_{-u_i}^{u_i} \frac{\sin u}{u} e^{ivu} du.$$

Dies Integral ist aber wegen der Symmetrie von $\frac{\sin u}{u}$ von v unabhängig, sobald wir bei der Entwicklung der Exponentialfunktion nach dem linearen Glied abbrechen.

Wir fordern also $u_i^2 \ll 1$. Praktisch genügt $u_i < \frac{1}{2}$; dort wird dann $H(u_i, v) \approx \frac{2}{\pi} u_i$ und wir erhalten im Meßbereich

$$\frac{2}{\gamma_a} < b < \frac{1}{2\pi\gamma_i} \quad (20)$$

aus (19)

$$P = P' \frac{1 - \frac{2}{\pi} u_i}{1 - P' \frac{2}{\pi} u_i}. \quad (19a)$$

b) Zylinderobjekte beliebigen und besonders elliptischen Querschnitts

Der homogene Parallelstreifen ist zwar einfach theoretisch zu behandeln und zu vermessen, hat jedoch in der Biologie kaum Bedeutung. Interessanter sind dort Zylinderobjekte anderen, vor allem elliptischen Querschnitts. Daher wollen wir hier auch ganz allgemeine Querschnitte behandeln.

Ist die Differenz $\Delta n = n_0 - n_F$ der Brechungsindizes n_0 der Umgebung und n_F unseres Fadenobjektes klein, so kann man die Wirkung des Objekts näherungsweise durch eine (in unserem Fall eindimensionale) Objektfunktion $O(x')$ erfassen (das Objekt der Breite $2R$ liege wieder symmetrisch zur y' -Achse). Es ist also

$$O(x') = \begin{cases} \pm 1 & \text{für } |x'| < R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (21)$$

Für einen Kreiszylinder ist

$$O(x') = \begin{cases} e^{i\beta\sqrt{R^2-x'^2}} & \text{für } |x'| < R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (21a)$$

Dabei ist bei fehlender Absorption

$$\beta = \frac{4\pi\Delta n}{\lambda}. \quad (22)$$

(21) gilt mit sinngemäß abgeändertem β auch für den elliptischen Zylinder.

Einsetzen in (4) ergibt

$$E(\gamma, \zeta) = \int_{-G/2}^{G/2} e^{-2\pi i \zeta y'} dy' \int_{-F/2}^{F/2} O(x') e^{-2\pi i \gamma x'} dx'$$

und für $F \rightarrow \infty$, $G \rightarrow \infty$

$$E(\gamma, \zeta) = \delta(\zeta, 0) \left\{ \delta(\gamma, 0) + \int_{-R}^R (O(x') - 1) e^{-2\pi i \gamma x'} dx' \right\}. \quad (23)$$

Auch hier liegen die Spektren also ganz auf der ζ -Achse.

Wir führen nun analog zu (14) die dimensionslose Variable u ein

$$u = 2\pi R \gamma \quad (14a)$$

und setzen voraus, daß für symmetrische Objekte mit $O(x') = O(-x')$ gelte

$$e^{iu_i} \approx 1 + u_i \quad u_i^2 \ll 1; \quad (24)$$

praktisch genügt $u_i < \frac{1}{2}$.

Für nicht symmetrische Objekte gelte

$$e^{iu_i} \approx 1 \quad u_i \ll 1; \quad (24a)$$

praktisch genügt $u_i < \frac{1}{4}$.

Dann wird für Punkte im Glimmerloch ($\gamma^2 + \zeta^2 > \gamma_a^2$)

$$M = \int_{-R}^R (O(x') - 1) e^{2\pi i \gamma x'} dx' = \int_{-R}^R (O(x') - 1) dx' \quad (25)$$

eine von γ unabhängige Konstante, und man kann die Bildfunktion nach (8) berechnen zu

$$\begin{aligned} B(x') &= e^{i\theta} \int_{-\gamma_a}^{\gamma_a} e^{2\pi i \gamma x'} \int_{-\infty}^{\infty} O(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx d\gamma \\ &\quad + (1 - e^{i\theta}) \int_{-\gamma_a}^{\gamma_a} e^{2\pi i \gamma x'} (\delta(\gamma, 0) + M) d\gamma \\ &= e^{i\theta} O(x') + (1 - e^{i\theta}) (1 + 2\gamma_i M), \end{aligned}$$

wenn man gute Auflösung voraussetzt, was wir hier tun wollen. Durch leichte Umformung erhält man

$$B(x') = \left\{ 1 + 2\gamma_i M \right\} \left\{ 1 + e^{i\theta} \left(\frac{O(x')}{1 + 2\gamma_i M} - 1 \right) \right\}. \quad (26)$$

Durch Vergleich mit (2) sieht man wieder wie bei den Betrachtungen zu Formel (16), daß man zweckmäßig von einer fehlerhaften Funktion $O'(x')$ ausgeht, die man unter der Voraussetzung strengen Phasenkontrasts gewinnt, und dann das wahre $O(x')$ durch Korrektur gewinnt nach der Formel

$$O(x') = O'(x') (1 + 2\gamma_i M). \quad (27)$$

Die Formeln (26) und (27) gelten wegen der Voraussetzung guter Auflösung und wegen (24) für symmetrische Objekte mit praktisch ausreichender Näherung im Meßbereich

$$\frac{2}{\gamma_a} < 2R < \frac{1}{2\pi\gamma_i}. \quad (20a)$$

Auf die problematische Frage, ob man tatsächlich bei der Messung auf völlige Dunkelheit einer Objektstelle einstellen kann, werden wir weiter unten im Zusammenhang mit der Messung an Glasfädern eingehen.

Die Berechnung von M kann im Einzelfall sehr kompliziert werden. Wir wollen sie wenigstens für den elliptischen Zylinder durchführen. Dort ist

$$\begin{aligned} \int_{\text{Objekt}} O(x') dx' &= \int_{-R}^R e^{i\beta \sqrt{R^2 - x'^2}} dx' = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\beta R \cos u} R \cos u du \\ &= 2R \int_0^{\pi/2} \cos(\beta R \cos u) \cos u du + 2iR \int_0^{\pi/2} \sin(\beta R \cos u) \cos u du \\ M &= \pi R \left\{ -\frac{2}{\pi} + \mathcal{Q}(\beta R) + i I_1(\beta R) \right\}. \end{aligned} \quad (25a)$$

Dabei ist I_1 die erste Besselfunktion und

$$\mathcal{Q}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos u) \cos u du$$

durch folgende Reihe darstellbar:

$$\mathcal{Q}(z) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{z^2}{1 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{z^6}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \dots \right).$$

e) Kleine zweidimensionale Objekte

Beliebige gut auflösbare Objekte, die durch eine Objektfunktion $O(x', y')$ beschrieben werden können, kann man in ganz analoger Weise behandeln, wenn sie in einem sonst leeren Objektfeld und ganz in einem Kreis um den Nullpunkt vom Radius R liegen, für den mit (14) $u = 2\pi R \gamma$ folgende Ungleichungen gelten:

$$u_i^2 \ll 1, \quad (24)$$

praktisch genügt $u_i < \frac{1}{2}$, für Objekte mit zwei senkrechten Symmetrieachsen, für die also im geeigneten System $\{x', y'\}$ gilt

$$O(x', y') = O(-x', y') = O(x', -y') = O(-x', -y').$$

Für nicht symmetrische Objekte soll gelten

$$u_i \ll 1, \quad (24a)$$

praktisch genügt $u_i < \frac{1}{4}$.

Aus (4) wird dann für Punkte im Glimmerloch ($\gamma^2 + \zeta^2 < \gamma_i^2$)

$$E(\gamma, \zeta) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(\gamma x + \zeta y)} dx dy + \iint_{\text{Objekt}} (O(x', y') - 1) e^{-2\pi i(\gamma x' + \zeta y')} dx' dy'$$

$$E(\gamma, \zeta) = \delta(\gamma, 0) \delta(\zeta, 0) + N.$$

Dabei ist analog zu (25)

$$\begin{aligned} N &= \iint_{\text{Objekt}} (O(x', y') - 1) e^{-2\pi i(\gamma x' + \zeta y')} dx' dy' \\ &= \iint_{\text{Objekt}} (O(x', y') - 1) dx' dy' \end{aligned} \quad (25b)$$

Wir ist für das Innere des Lochs im Glimmer wieder eine von γ und ζ unabhängige Konstante. Aus (8) folgt dann wegen der Voraussetzung guter Auflösung

$$B = e^{i\vartheta} O(x', y') + (1 - e^{i\vartheta}) \iint_{\gamma^2 + \zeta^2 < \gamma_i^2} e^{2\pi i(\gamma x' + \zeta y')} \{ \delta(\gamma, 0) \delta(\zeta, 0) + N \} d\gamma d\zeta$$

$$= e^{i\vartheta} O(x', y') + (1 - e^{i\vartheta}) (1 + \pi \gamma_i^2 N)$$

$$B(x', y') = \{ 1 + \pi \gamma_i^2 N \} \left\{ 1 + e^{i\vartheta} \left(\frac{O(x', y')}{1 + \pi \gamma_i^2 N} - 1 \right) \right\} \quad (26a)$$

und

$$O(x', y') = O'(x', y') (1 + \pi \gamma_i^2 N) \quad (27a)$$

in voller Analogie zu den Formeln (26) und (27). Auch die Auswertung der Messung verläuft in analoger Weise. Die Berechnung des Integrals N kann auch hier erhebliche Schwierigkeiten machen. Für ein homogenes Objekt vom Flächeninhalt Φ mit der konstanten Objektfunktion P wird einfach

$$N = (P - 1) \Phi.$$

Man beachte, daß alle drei Objektformen eines gemein haben: Das Objekt liegt isoliert in einem sonst leeren Gesichtsfeld (s. die Ansätze (9), (21) und die entsprechende Bemerkung im ersten Absatz von e)).

4. Die Apparatur

Bei der Realisierung der Apparatur, wie sie in Abb. 1 skizziert ist, waren zwei Forderungen zu beachten:

1. Um einer möglichst guten Annäherung an strengen Phasenkontrast willen, bzw. um den Meßbereich (20) groß zu machen, mußten die Aperturen der Beleuchtung und des Lochs im Glimmer möglichst klein gehalten werden.

2. Streulicht erniedrigt die Meßgenauigkeit und kann systematische Fehler bewirken. Es muß daher auf ein Minimum reduziert werden.

Um der zweiten Forderung willen wurden alle Optiken vergütet. Weiterhin wurde ein starker Köhlerscher Beleuchtungsapparat verwendet. Die Streuung am Rande des Lochs im Glimmer wurde durch Einbetten in Kanadabalsam verringert. Endlich war strenge Monochromasie erforderlich. Sie war durch eine Quecksilberhochstdrucklampe in Verbindung mit einem Interferenz-Bandfilter für die grüne Quecksilberlinie ($\lambda = 546 \text{ m}\mu$) gegeben. Nach all diesen Maßnahmen betrug die Streuintensität noch etwa 0,2% der Gesamtintensität (für beide Objektive (s. u.) übereinstimmend).

Die erste Forderung bedeutet die Notwendigkeit, Löcher von etwa $1/10 \text{ mm}$ Durchmesser in Glimmer zu bohren. Da ein $\lambda/2$ -Glimmerplättchen, das gute Meßgenauigkeit und bequeme Auswertung für sich hat, $0,05 \text{ mm}$ dick ist, der Glimmer sehr leicht spaltet, was natürlich vermieden werden muß, und da der Rand des Bohrloches möglichst glatt sein sollte, machte die Bohrung zunächst Schwierigkeiten. Von Hand kann man Löcher bis zu $0,12 \text{ mm}$ Durchmesser mit Uhrmacherspitzbohrern bohren; brauchbare Löcher mit Durchmessern bis zu $0,05 \text{ mm}$ gelangen mit Uhrmacher-Spiralbohrern auf einer Präzisionsbohrmaschine. Der Bruchrand war $5-10 \mu$ breit.

Doppelbrechende Folien, etwa die Polyvinylfolien von Käsemann, sind zwar dünner und lassen sich leichter bohren als Glimmer. Ihre optischen Qualitäten genügen zur Zeit jedoch noch nicht den Ansprüchen des Verfahrens.

Zwei Mikroobjektive der Firma E. Leitz wurden für das Verfahren eingerichtet, die Achromaten P6L, 45x, N. A. 0,65, und $1/12$ Öl, 100x, N. A. 1,30. Der Brennpunkt des schwächeren Objektivs P6L liegt nahe dem letzten Linsenscheitel, daher konnte das Glimmerplättchen direkt hinter die letzte Linse auf das Objektiv gelegt werden. Ein $\lambda/2$ -Glimmerplättchen mit einem Loch von 0,12 mm Durchmesser wurde dazu zwischen zwei Deckgläsern in Kanadabalsam eingebettet, um das Streulicht von den Lochrändern her zu vermindern und einen Intensitätsunterschied zwischen Spektrum nullter Ordnung und den Seitenspektren durch Reflexionsverluste zu vermeiden. Mit der Objektivapertur $A_a = 0,65$ und der Apertur des Lochs im Glimmer $A_i = 0,018$ (über die Messung von A_i , s. u.) ergab sich der Meßbereich (20) zu

$$1,6 \mu < b < 5,0 \mu. \quad (20')$$

Die Korrekturen des Abschnitts 3 sind durchaus erforderlich. Das Bild der Kondensorblende (b), die im Blendenrevolver des Phasenkontrastkondensors von Zeiß-Opton bequem justierbar angebracht war, hatte einen Durchmesser von etwa 0,04 mm. Damit war eine hinreichende Annäherung an eine punktförmige Lichtquelle gegeben. Das hatte auch den Vorteil, daß trotz der mäßig guten Abbildung der Kondensorblende – die Optiken sind ja nicht für diese Abbildung korrigiert – das ganze Spektrum nullter Ordnung durch das Loch ging. Da dies bei wesentlich kleineren Löchern Schwierigkeiten gemacht hätte und da bei so kleinen Beleuchtungsaperturen die Leuchtdichte selbst der verwendeten Höchstdrucklampe keine hinreichende Helligkeit des Gesichtsfelds mehr ermöglicht hätte, wurde hier auf noch kleinere Löcher verzichtet.

Für die Anwendung ist natürlich ein Immersionsobjektiv wichtiger. Da die Brennebene hier stets tief im Objektiv liegt, mußte das Glimmerplättchen ins optische System eingebaut werden. Die Firma E. Leitz übernahm es freundlicherweise, eine Linse ihres Immersionsobjektivs $1/12$ Öl aufzuschneiden und ein $\lambda/2$ -Glimmerplättchen einzukitten, das eine Bohrung von 0,05 mm Durchmesser trug. Mit $A_a = 1,30$ und $A_i = 0,020$ ergab sich der Meßbereich (20) zu

$$0,8 \mu < b < 4,5 \mu. \quad (20'')$$

Aus technischen Gründen konnten die Glimmerplättchen nicht genau in die Objektivbrennebenen eingebaut werden. Da dann auch die Kondensorblende nicht im Brennpunkt des Kondensors liegt, durchsetzt die Objektivebene kein Parallelbündel und unsere Theorie aus Abschnitt 3 scheint zunächst fraglich zu werden, da sie doch Fraunhofer'sche Beugungstheorie ist. Man kann sich aber durch eine einfache Überlegung helfen.

Die Kondensorblende (b) (s. Abb. 3) befindet sich nicht in der Brennebene des Kondensors (a). Dann durchsetzt die Objektivebene (c) ein divergentes Bündel, das in dieser Ebene, in die wir ein Koordinatensystem $\{x, y\}$ legen, durch $E(x, y)$ beschrieben wird. Legt man nun ein Objekt der Objektivfunktion $O(x, y)$ in die Objektivebene, so hat man direkt hinter ihr die Lichteerregung $E(x, y) O(x, y)$, die in der Ebene G , in die bei fehlendem Objekt die Blende (b) abgebildet wird, zu einem Beugungsbild interferiert. Dieses Beugungsbild läßt sich also prinzipiell aus $E(x, y) O(x, y)$ berechnen. Nun können wir uns $E(x, y) O(x, y)$ aber auch auf andere Weise entstanden denken:

Es falle und direkter $E(x, y)$ wieder auf das Objektiv, so ist G dort offen des Glimmers ja unbedeutend (d') bestimmt vielmehr Objekte. Die Apertur sind bei der Linsen Ebenen graphieren. Der Apertur A ist

Bei 25° gemessen und dann reguliert umgeben dem sie

Die Firma älterer Analysa

Die absorbiert dem Punkt. Es gelangt in einen fluß des eine an

Es falle ein Parallelbündel auf die Objektebene. In ihr liege wieder das Objekt und direkt dahinter eine unendlich dünne, endlich starke Linse (*e*), die durch $E(x, y)$ beschrieben werden kann. Direkt hinter der Linse (*e*) haben wir dann wieder die Lichterregung $E(x, y) O(x, y)$. Faßt man diese Linse nun mit dem Objektiv (*d*) zu einem neuen Objektiv (*d'*) zusammen, so ist *G* dessen Brennebene und das Beugungsbild dort offensichtlich Fraunhofersch. Die Apertur A_i des Glimmerlochs kann nun freilich nicht über die ja unbekannte Brennweite des gedachten Objektivs (*d'*) bestimmt werden. Zu ihrer Messung legt man vielmehr am einfachsten ein Gitter als Objekt in die Objektebene, z. B. einfach ein Objektmikrometer. Die Aperturen der Beugungsspektren dieses Gitters sind bekannt, und man mißt A_i durch Vergleich der Lochgröße mit dem Spektrenabstand. Die Ebenen *G* der beiden Objektive wurden photographiert. Aus den Photographien wurden die Aperturen A_i bestimmt.

Der Brechungsindex von Kanadabalsam hängt von der Temperatur ab. (Für Glimmer kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen.) Mit diesem Brechungsindex n_0 ändert sich auch die Phasendrehung ϑ der Seitenspektren im Glimmerplättchen mit der Temperatur T . Ist d die Dicke des Glimmerplättchens, so gilt

$$\frac{d\vartheta}{dT} = 360^\circ \frac{d}{\lambda} \frac{dn_0}{dT}. \quad (28)$$

Bei 25°C ist $\frac{dn_0}{dT} = 3,45 \cdot 10^{-4} / \text{C}$. $d = 53 \mu$ wurde mit einer Mikromeßuhr gemessen. So erhält man $\frac{d\vartheta}{dT} = 12,0^\circ / \text{C}$. Die Temperatur des Objektivs und damit des Kanadabalsams muß also auf Bruchteile eines Grads genau regulierbar sein. Beide Objektive wurden daher mit Temperierzylindern umgeben. Diese wurden an einen Umlaufthermostaten angeschlossen, mit dem sich eine Temperaturkonstanz von $0,02^\circ \text{C}$ bequem erreichen ließ.

Die Polarisatoren (*k*) und (*h*) (s. Abb. 1) waren Polarisationsfolien der Firma Käsemann. Alle Teile waren an einem Zeißschen Universalstativ älterer Bauart montiert, die drehbare Glimmerplatte (*i*) und der drehbare Analysator (*k*) direkt am Tubus hinter dem Okular.

5. Messungen an Streifenobjekten; Meßgenauigkeit

Die einfachsten Probeobjekte zur Prüfung des Geräts sind homogene, nicht absorbierende Streifen, wie man sie sich mit einem Rasierklingensplitter unter dem Phasenkontrastmikroskop aus Zaponlackschichten schneiden kann. Es gelang, Streifen mit Breiten bis zu 1μ herab zu schneiden. Solche Streifen eignen sich zugleich zur Eichung der Objektive. Da der Amplitudeneinfluß des Objekts $P_0 = 1$ hier bekannt ist, kann man der Messung statt dessen eine andere Größe entnehmen, die Phasendrehung ϑ_x bzw. ϑ_y der Seiten-

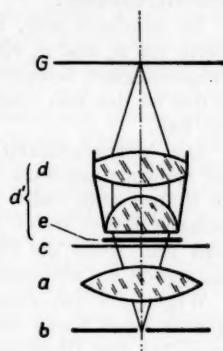


Abb. 3. Zum Vergleich Fraunhoferscher und nicht Fraunhoferscher Beugung. (a) Kondensor, (b) Kondensorblende, (c) Objektebene, (d) Objektiv, (e) gedachte dünne Linse, (*d'*) = (*d* + *e*) gedachtes Objektiv, (G) Ebene der Beugungsfigur

spektren im Objektiv, wie man sich leicht überlegen kann. ($\vartheta_y - \vartheta_x$ wird natürlich mit Hilfe eines Kompensators gemessen.) Die Eichung über den Temperaturbereich von 16–50°C ergab die nach (28) zu erwartende Proportionalität zum Brechungsindex von Kanadabalsam bzw. zu seinem Temperaturgradienten.

Es empfiehlt sich, bei der Messung mit Hilfe des Thermostaten solche Werte von ϑ_x und ϑ_y einzustellen, daß die Bildellipse flach wird, da dann die Meßgenauigkeit besonders hoch ist. Für nicht zu starke Objekte ($|\varphi_0| < 90^\circ$) ist das bei den hier verwendeten $\lambda/2$ -Glimmerplättchen für $\vartheta_x = -\vartheta_y = 90^\circ$ der Fall.

Die Meßgenauigkeit wird im wesentlichen durch Streulicht begrenzt. Der Schwingungsellipse (2) überlagert sich (meist unpolarisiertes) Streulicht, die Ellipse kann daher nicht mehr einwandfrei vermessen werden. Systematische Fehler treten bei den geringen Streulichtmengen (0,2%) praktisch nicht auf, wenn die Phase des Objekts mehr als 4° beträgt. Die Einstellgenauigkeit am elliptischen Analysator beträgt 1° .

Wegen des unvermeidlichen Bruchrands des Lochs im Glimmer ist die Apertur dieses Lochs nur auf 10% genau für das Objektiv P6L und auf 20% genau für das Objektiv $1/12$ Öl bestimbar. Diese Unbestimmtheit wirkt sich auf die Meßgenauigkeit für breite Objekte aus, wie (19a) zeigt (u_i enthält das Produkt aus der Objektbreite und der Apertur des Lochs im Glimmer als Faktor). Endlich lassen sich die Phasendrehungen ϑ_x bzw. ϑ_y im Objektiv nur auf $1,5^\circ$ genau bestimmen, was sich auch auf die Meßgenauigkeit auswirkt.

Die Meßgenauigkeit, die also durch diese drei Faktoren begrenzt wird, hängt in ziemlich unübersichtlicher Weise von den Objektdaten ab. Die Meßfehler wachsen mit der Objektbreite und mit dem Phaseneinfluß des Objekts. Für schwache Objekte ($|\varphi_0| < 40^\circ$) mit Breiten von weniger als 4μ beträgt die Meßgenauigkeit 1° in der Phase und 1% in der Amplitude. Für ungünstige Objekte können Fehler bis zu 8° bzw. 9% auftreten. Es handelt sich dabei um den mittleren Fehler der Einzelmessung. Da systematische Fehler mit eingehen und da aufeinanderfolgende Messungen zudem durch die Physiologie des Beobachters gekoppelt sind, wird der Mittelwert aus einer größeren Zahl von Messungen nicht wesentlich genauer.

Als Vergleichsverfahren diente das Dreistrahlg-Interferenzverfahren von Zernike¹⁶⁾ in einer Ausführung nach Strohmaier¹⁷⁾. Das Verfahren hat eine Meßgenauigkeit von $1/2^\circ$. Die nach beiden Verfahren gemessenen Werte für den Phaseneinfluß des Objekts stimmten in den Fehlern gut überein.

6. Messungen an Zylinderobjekten (Glasfäden)

Eine in der Biologie häufige Objektform ist der Kreiszylinder, man denke etwa an Bakterien und Pilze. Daher war eine entscheidende Frage, ob für solche Objekte gut reproduzierbare, kennzeichnende Analysatorstellungen existieren und wie sich gegebenenfalls aus ihnen die Objektdaten errechnen lassen. Es schien ratsam, die Frage an einfachen Modellobjekten zu untersuchen, wozu sich Glasfäden verschiedener Dicke in verschiedenen brechenden Immersionsflüssigkeiten gut eigneten.

¹⁶⁾ F. Zernike, J. Opt. Soc. Amer. **40**, 326 (1950).

¹⁷⁾ K. Strohmaier, Z. Physik **135**, 44 (1953).

Die dünnen Glasfäden wurden auf folgende Weise in der Flamme eines Bunsenbrenners hergestellt: Zuerst wird aus einem runden Stab ein Faden von wenigen Zehntel mm Dicke gezogen, der gute elastische Eigenschaften hat. Ein U-förmiger Bogen dieses Fadens wird in den obersten Teil der Flamme gehalten. Bei einer bestimmten Temperatur des Fadens schnellt dieser durch seine eigenen elastischen Kräfte auseinander; die beiden Enden sind dann, wenn man etwas Glück gehabt hat, dünne Fäden, deren Durchmesser auf einer Länge von wenigen cm von $10\text{ }\mu$ bis auf Bruchteile von $1\text{ }\mu$ abnimmt. Dieser Dickenbereich interessiert gerade. Geht man dabei von Stäben kreisrunden Querschnitts aus, so ist auch der Querschnitt der Fäden mit hinreichender Näherung kreisrund. Legt man solch einen Faden auf einen Objektträger und befestigt das dicke Ende mit einem Tropfen Zaponlack, so haftet er fest, auch wenn man ihn häufig in wechselnde Immersionsflüssigkeiten einbettet, wofür sich die in der Mineralogie üblichen Mischungen aus α -Bromnaphthalin und Kerosin eignen. Da man sich aus den beiden Flüssigkeiten Lösungen mit beliebigem Brechungsindex zwischen 1,44 (Kerosin) und 1,64 (α -Bromnaphthalin) herstellen kann, bietet der Glasfaden (sein Brechungsindex war $n_F = 1,51$) in solchen Lösungen den gesamten praktisch interessierenden Teil des zweidimensionalen Kontinuums aller nicht absorbierenden Kreiszylinderobjekte.

Die geometrische Fadendicke konnte im Hellfeld mit einem Immersionsobjektiv und Mikrometerokular auf $0,1\text{ }\mu$ genau gemessen werden. Der Brechungsindex n_F des Fadens ergab sich aus den Messungen selbst durch Interpolation zwischen den Ergebnissen bei sehr kleinen positiven und negativen Indexdifferenzen ($\Delta n = n_0 - n_F \gtrless 0$ und $|\Delta n| < 0,010$). Bemerkenswert ist, daß der Brechungsindex der Fäden in den Grenzen der Meßgenauigkeit ($\pm 0,0004$) für Durchmesser von $10\text{ }\mu$ bis $0,3\text{ }\mu$ konstant war.

Der Ausgangspunkt für eine Diskussion der Messungen an solchen Glasfäden ist die Tatsache, daß es im Meßbereich (20) und für $|\Delta n| < 0,05$ für jedes Fadenobjekt zwei auf 1° reproduzierbare Analysatorstellungen gibt, für die das ganze Objekt gleichmäßig schwarz wird. Für breitere und vor allem für stärker brechende Objekte geht die Reproduzierbarkeit rasch zurück. Der Vergleich von fünf Beobachtern ergab für diese Stellungen Übereinstimmung der ersten vier auf 1° , während beim fünften, der auch schon bei Messungen an Zaponlackstreifen aus der Reihe fiel, Abweichungen bis zu 5° auftraten. Die Existenz dieser reproduzierbaren Stellungen gleichmäßig schwarzen Objekts erstaunt zunächst, da die optische Dicke ja gar nicht über das ganze Objekt hin konstant ist, wie beim Zaponlackstreifen. Möglicherweise erklärt sie sich zum Teil so, daß bei diesen Stellungen tatsächlich für keine Objektstelle das absolute Intensitätsminimum vorliegt, das Objekt also im Grunde (auch nach Abzug des Streulichts) nur gleichmäßig grau ist. Vermutlich wirkt hier aber auch der bekannte physiologische Effekt mit, daß das Auge Kontraste überhöht. Dadurch kann eine etwaige Aufhellung der Ränder gegenüber der schwarzen Mitte physiologisch z. T. kompensiert werden.

Die Messungen wurden daher unter der Annahme ausgewertet, daß sie sich auf das Minimum der Intensität in der Objektmitte beziehen. Die Auswertung lieferte dann die optischen Eigenschaften in der Objektmitte. Die so gewonnenen Werte φ'_0 für die Phase und P'_0 für die Amplitude wurden ver-

glichen mit den zu erwartenden Werten $P_0 = 1$ und $\varphi_0 = 360^\circ \frac{2 R \Delta n}{\lambda}$ φ_0 errechnet sich aus der geometrischen Dicke $2 R$, den Brechungssindizes und der Vakuumwellenlänge λ des benutzten Lichts.

Ein Faden wurde in jeweils 9 verschiedenen Lösungen unter beiden Objektiven durchgemessen. Die Abb. 4 und 5 zeigen die Ergebnisse. In ihnen ist das Verhältnis $\Phi = \omega_0'/\omega_0$ und die Differenz $4\omega_0 = \omega_0' - \omega_0$ der gemessenen

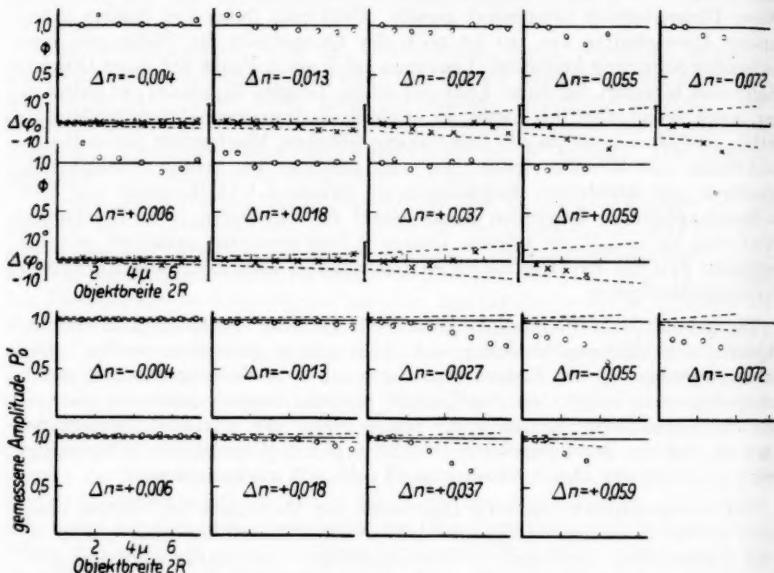


Abb. 4. Messungen mit dem Objektiv P6L ($\theta_x = -\theta_y = 90^\circ$) an einem Glasfaden vom Brechungsindex n_g in Lösungen von verschiedenen Brechungsindizes n_0 . $\Delta n = n_0 - n_g$ als Parameter. Ist φ_0 die gemessene Phase, φ_0 die aus den Brechungsindizes und der Objektbreite $2 R$ errechnete Phase, so ist oben $\Delta\varphi_0 = \varphi_0' - \varphi_0$ und $\Phi = \varphi_0'/\varphi_0$ gegen die Objektbreite aufgetragen, unten die gemessenen Amplitude P_0 . Zu erwarten wäre $\Phi = 1$, $P_0 = 1$. Die gestrichelten Keile geben die Fehlergrenzen an, wie sie auf Grund der in Abschnitt 5 diskutierten Fehlerquellen und der Fehler in Δn und $2 R$ zu erwarten sind. Die Fehler durch Inkonsistenz der optischen Dicke und durch den Näherungsansatz (21a) sind darin nicht enthalten

Phase φ'_0 und der berechneten Phase φ_0 sowie die gemessene Amplitude P'_0 gegen die Objektbreite $2 R$ aufgetragen. Zu erwarten ist $\Phi = 1$, $\Delta\varphi_0 = 0$ und $P'_0 = 1$. Die gestrichelten Keile geben die Fehlergrenzen für $\Delta\varphi_0$ und P'_0 an, wie sie sich aus den in Abschnitt 5 diskutierten Fehlerquellen und aus den Fehlern für Δn (+ 0,0005) und $2 R$ (+ 0,1 μ) ergeben.

Im Meßbereich (20') für P6L ($1,6 \mu < 2R < 5,0 \mu$) bzw. im Meßbereich (20') für $^{1/2}\text{Öl}$ ($0,8 \mu < 2R < 4,5 \mu$), zum Teil auch noch darüber hinaus, stimmen für $|\Delta n| < 0,04$ die gemessenen Phasen und für $|\Delta n| < 0,02$ auch die gemessenen Amplituden in den Fehlergrenzen mit den berechneten

Übereinstimmung
Objekt-Einstellung
nur die offenbare
mehrung

Abb. 5.

Im
kroskop
isolierter
schen P
es ents
deckend
optisch

überein. Die Abweichungen für breitere und vor allem für stärker brechende Objekte sind z. T. darauf zurückzuführen, daß die Reproduzierbarkeit der Einstellung zurückgeht, weshalb in den stärker brechenden Lösungen auch nur dünne Fäden vermessen werden konnten, vor allem aber darauf, daß offenbar für $|\Delta n| > 0,04$ der Ansatz (21a) die Wirkung des Objekts nicht mehr in hinreichender Näherung beschreibt. Auf Grund einer strengen Beugungstheorie des Zylinders läßt sich der Meßbereich also prinzipiell noch erweitern.

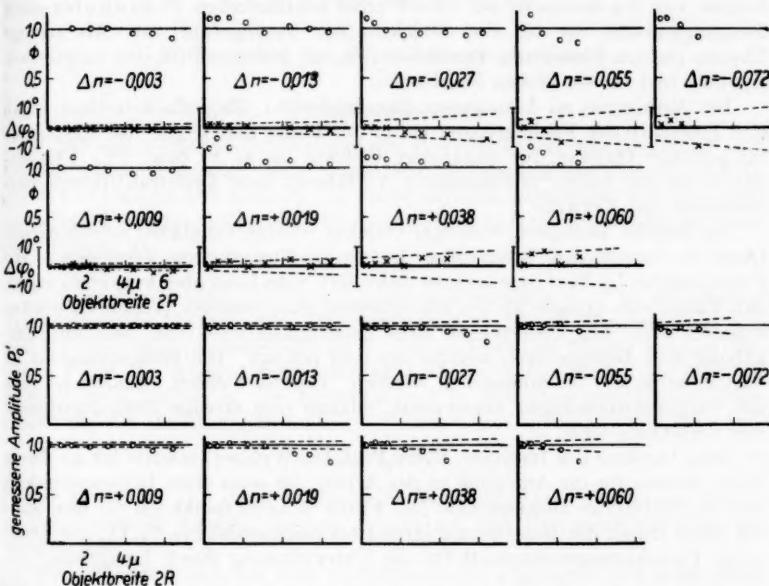


Abb. 5. Messungen mit dem Objektiv $1/12$ Öl ($\theta_x = -\theta_y = 90^\circ$) an demselben Faden und in völlig analoger Weise wie in Abb. 4

tern. Solange diese fehlt, ist man außerhalb des oben angegebenen Meßbereichs auf Vergleichsmessungen angewiesen. Die Diagramme der Abb. 4 und 5 können dann als Eichdiagramme der beiden Objektive für schwach absorbierende Objekte benutzt werden.

7. Zusammenfassung

Im Anschluß an Zernikes Phasenkontrastmikroskop wurde ein Mikroskop gebaut, mit dem sich der Phasen- und der Amplitudeneinfluß eines isolierten Objekts messen lassen. Dabei tritt an die Stelle des Zernikeschen Phasenstreifens im Objektiv ein zentral durchbohrtes Glimmerplättchen; es entstehen dann zwei senkrecht zueinander polarisierte, geometrisch sich deckende, sonst aber verschiedene Phasenkontrastbilder. Die polarisationsoptische Analyse der Schwingungsellipse, zu der sich diese beiden Schwin-

gungen überlagern, liefert die Objektgrößen. Ihr Zusammenhang mit den Ellipsendaten ist relativ einfach für „strengen Phasenkontrast“, d. h. wenn das Produkt aus Objektbreite und Apertur des Lochs im Glimmerplättchen gegen Null geht. Die kleinsten erreichbaren Lochdurchmesser betragen 0,05 mm. Auch bei diesen kleinsten Löchern kommt man jedoch z. B. für eine Ölimmersion (100 x, N. A. 1,30) nur für Objektbreiten bis maximal 1μ d. h. gerade bis kurz über die Auflösungsgrenze, mit der einfachen Theorie für strengen Phasenkontrast aus. Man kann den Meßbereich bis zu Objektbreiten von 5μ erweitern auf Grund einer ausführlichen Fraunhoferischen Beugungstheorie, die für drei Objektformen durchgeführt ist: Als strenge Theorie für den homogenen Parallelstreifen, als Näherung für den elliptischen Zylinder und für ein kleines Scheibchen.

Bei Messungen an homogenen Parallelstreifen (Zaponlackstreifen) ergab sich innerhalb der Fehlergrenzen (1° in der Phase und 1% in der Amplitude für günstige Objekte, für ungünstige Objekte bis zu 8° bzw. 9%) Übereinstimmung mit einem unabhängigen Verfahren, dem Dreistrahl-Interferenzverfahren von Zernike.

Als Modelle biologisch wichtiger Objekte wurden Glasfäden verschiedener Dicke in verschiedenen brechenden Immersionsflüssigkeiten vermessen. Die Fehler werden im Text im einzelnen diskutiert, man kann aber kurz etwa sagen, daß Fäden von weniger als 5μ Durchmesser ohne weiteres vermessen werden können, wenn der Unterschied ihres Brechungsexponenten von dem der Umgebung dem Betrage nach weniger als 0,04 beträgt. Die Meßgenauigkeit ist dort dieselbe wie bei homogenen Streifen. Oberhalb dieser Grenzen ist man auf Vergleichsmessungen angewiesen, solange eine strenge Beugungstheorie des Verfahrens fehlt.

Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. Wolter, möchte ich an dieser Stelle danken für die Anregung zu der Arbeit, für seine stete Hilfsbereitschaft und für förderliche Diskussionen. Der Firma E. Leitz danke ich für ihre Hilfe vor allem durch die Bearbeitung ihres Immersionsobjektivs $1/12$ Öl, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung durch Leihgeräte.

Marburg/Lahn, Institut für Angewandte Physik der Universität.

Bei der Redaktion eingegangen am 26. September 1957.

Äquiv

Dur
überein
das Ma
wenn d
proport

Bei
das sog
daß für
quenz
quenz
sphäre

Diese
in Fra
worden
Wi

Theore
bei sch
Theore

Wi
einfalle
recht
Feld **I**
x (hori
funktio

Wir h
angese

¹⁾
zum ina
Der In
sphäre²⁾

den
wenn
chen
agen
. für
1 μ
eorie
jekt-
chen
enge
chen

rgab
tude
rein-
renz-
einer
Die
gen,
rden
Um-
t ist
man
orie

ieser
haft
Hilfe
eut-

t.

Äquivalenztheoreme bei der Wellenabsorption im Plasma

Von K. Rawer und K. Suchy

K. Försterling zum 70. Geburtstage gewidmet¹⁾

Inhaltsübersicht

Durch eine wellentheoretische und eine strahlentheoretische Rechnung wird übereinstimmend gezeigt, daß (ohne Berücksichtigung des Erdmagnetfelds) das Martynsche Theorem für die ionosphärische Absorption nur dann gilt, wenn die Schwächung überwiegend durch Stöße bedingt ist und der Stoßzahl proportional ist.

Bei der Berechnung der ionosphärischen Absorption wird im allgemeinen das sogenannte Martynsche Theorem benutzt. Dieses Theorem sagt aus, daß für das Absorptionsdecrement δ_{\perp} bei senkrechtem Einfall auf der Frequenz f und das Absorptionsdecrement δ_{\wedge} bei schiefem Einfall auf der Frequenz $f/\cos \alpha_0$ (wobei α_0 der Einfallswinkel in eine eben geschichtete Ionosphäre ist) die Beziehung besteht:

$$\delta_{\perp}(f) = \cos \alpha_0 \cdot \delta_{\wedge} \left(\frac{f}{\cos \alpha_0} \right). \quad (1)$$

Dieses Gesetz ist nun durch englische Beobachtungen aus den letzten Jahren in Frage gestellt worden, die von Appleton und Beynon²⁾ veröffentlicht worden sind.

Wir versuchen hier auf eine verhältnismäßig allgemeine Art Äquivalenz-Theoreme, d. h. Beziehungen zwischen der Absorption bei senkrechtem und bei schiefem Einfall, abzuleiten, um festzustellen, inwieweit das Martynsche Theorem sich dabei ergibt oder etwa andere Zusammenhänge.

Wir betrachten ebene Wellen, die auf eine eben geschichtete Ionosphäre einfallen und behandeln zunächst den Fall, daß das elektrische Feld \mathbf{E} senkrecht zur Einfallsebene liegt. Aus der Wellengleichung für das elektrische Feld \mathbf{E} erhält man dann durch Separierung nach den beiden Koordinaten x (horizontal) und z (vertikal) eine Differentialgleichung in z mit der Wellenfunktion $\Pi(z)$:

$$\frac{d^2\Pi}{dz^2} + \mathbf{F}_{\perp}(z) \cdot \Pi \equiv \frac{d^2\Pi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} [\epsilon(z) - \sin^2 \alpha_0] \cdot \Pi = 0. \quad (2)$$

Wir haben dabei harmonische Zeitabhängigkeit mit der Kreis-Frequenz ω angesetzt, ϵ ist die (relative) Dielektrizitätskonstante des Mediums, die komplex

¹⁾ Die Arbeit entstand während der gemeinsamen Zugehörigkeit beider Verfasser zum inzwischen aufgelösten „Service de Prévision Ionosphérique Militaire“ (Frankreich). Der Inhalt wurde 1955 in Tübingen bei der Tagung der „Arbeitsgemeinschaft Ionosphäre“ vorgetragen.

²⁾ E. V. Appleton u. W. J. G. Beynon, J. Atm. Terr. Phys. 6, 141–148 (1955).

sein kann, c die Lichtgeschwindigkeit, α_0 der Einfallswinkel. Die Gleichung hat die Form einer separierten Wellengleichung mit der Kernfunktion F_\perp

$$F_\perp(z) = \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon(z) - \sin^2 \alpha_0]. \quad (3)$$

Im Falle der anderen Hauptpolarisation, wo der Vektor E in der Einfallsebene liegt, muß man die Wellengleichung für die magnetische Feldstärke H ansetzen und erhält dann eine ähnliche Gleichung, jedoch mit einem Gradientenglied

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{dH}{dz}.$$

Dieses störende Glied kann durch Substitution

$$\Pi' = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(z)}} \Pi \quad (4)$$

wenigstens formal entfernt werden, dafür tritt dann allerdings ein Glied, das den Gradienten von ε enthält, in den Kern der Wellengleichung ein, der dann lautet:

$$F_\parallel = \frac{\omega^2}{c^2} [\varepsilon(z) - \sin^2 \alpha_0] + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} - \frac{3}{4\varepsilon^2} \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right)^2. \quad (5)$$

Die angesetzte Wellengleichung hat bei gegebenem stetigem Verlauf von $\varepsilon(z)$ irgendeine Lösung, die wir im allgemeinen nicht explizit angeben können. Für die Ausdeutung der Ionosphären-Beobachtungen interessiert aber nur das asymptotische Verhalten dieser Lösungen. Deshalb genügt es, die asymptotischen Lösungen zu kennen. Der Reflexionskoeffizient einer Ionosphären-Schicht ergibt sich dann aus dem Verhalten der asymptotischen Lösungen, die bei Annahme eines Grenzwertes $\varepsilon = 1$, weit von der Schicht entfernt notwendig ebene Wellen sind. Der Reflexionskoeffizient, als Verhältnis der komplexen Amplituden dieser ebenen asymptotischen Wellen, hängt nur vom Kern der Wellengleichung, also der Funktion F , ab. Dabei besteht keine Eindeutigkeit; es können durchaus verschiedene F -Funktionen den gleichen Reflexionskoeffizienten geben. Für die Beobachtung „im Unendlichen“ besteht Äquivalenz der Lösungen, wenn nach Amplitude und Phase der gleiche Reflexionskoeffizient sich ergibt. Eine spezielle Äquivalenzklasse bilden natürlich die Fälle, bei denen sogar die Kernfunktion F invariant gelassen wird.

Der Weg, den wir im folgenden beschreiten, besteht nun darin, daß wir Vergleichsfälle suchen, in denen die Kernfunktion invariant bleibt. Wir erfassen damit nur einen sehr beschränkten Teil der möglichen Äquivalenz-Klassen, werden aber sehen, daß wir einige typische Fälle nach dieser Methode behandeln können. Die Überlegung wird immer so vor sich gehen: Man betrachtet eine bestimmte Welle, die mit dem Winkel α_0 bei der Frequenz ω und der Stoßzahl ν einfällt und sucht nun mittels der betreffenden Invarianzgruppe einen Vergleichsfall, der die gleiche Kernfunktion F hat, wobei aber nun der Einfallswinkel 0 ist und sich aus der Invarianz für Frequenz und Stoßzahl bestimmte Bedingungen ergeben. Diese Bedingungen formulieren dann ein Äquivalenz-Theorem.

Gehen wir von der einfachen Dispersionsformel ohne Beachtung des Erdmagnetfeldes aus, also der Sellmeier-Formel:

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{X(z)}{1 + iZ(z)} \quad (6)$$

$$X(z) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} N_e(z) \quad Z(z) = \frac{v(z)}{\omega}, \quad (6a)$$

dann ergibt sich der folgende Ausdruck für F_{\perp} :

$$F_{\perp} = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 \cos^2 \alpha_0 - \frac{X \omega^2}{1 + iZ} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 \cos^2 \alpha_0 - \frac{q_e^2 N_e / \epsilon_0 m_e}{1 + i v / \omega} \right). \quad (7)$$

Dieser Ausdruck bleibt invariant, wenn man übergeht von

$$\alpha_0; \omega; v \quad \text{nach} \quad 0; \omega \cos \alpha_0; v \cos \alpha_0.$$

Die Invarianz ist in diesem Falle gliedweise gegeben, die Bedingungen für die Transformation von ω und v ergeben sich aus den einzelnen Gliedern.

Weil Äquivalenz besteht, gilt für das Reflexionsdekkrement (Logarithmus des Reflexionskoeffizienten):

$$\delta(\alpha_0, \omega, v) = \delta(0, \omega \cos \alpha_0, v \cos \alpha_0). \quad (8)$$

Es ergibt sich aus dieser Überlegung also etwas Ähnliches wie das Martynsche Theorem; die Transformation der Frequenz entspricht genau der, wie sie vom Martynschen Theorem verlangt wird, zusätzlich aber wird eine Transformation der Stoßzahl gefordert, die bei Martyn nicht vorgesehen ist. Das Martynsche Theorem enthält eine Aussage über

$$\delta(\alpha_0, \omega, v) \quad \text{und} \quad \delta(0, \omega \cos \alpha_0, v).$$

Wir suchen eine Relation von der Form

$$\delta(\alpha_0, \omega, v) = a \cdot \delta(0, \omega \cos \alpha_0, v), \quad (9)$$

wobei im Martynschen Falle $a = \cos \alpha_0$ ist.

Formal können wir jedenfalls (9) statt (8) schreiben, wenn wir setzen:

$$a = \frac{\delta(0, \omega \cos \alpha_0, v \cos \alpha_0)}{\delta(0, \omega \cos \alpha_0, v)}. \quad (10)$$

Aus der letzten Form erkennen wir sofort, daß nur in den Fällen, wo das dritte Argument keinen Einfluß auf das Dekrement hat, $a = 1$ wird. Dies kann nur dort auftreten, wo die Stöße „keine Rolle spielen“, d. h. die Verluste durch partielle Reflexion die Verluste durch reine Absorption überwiegen oder aber überhaupt keine merklichen Verluste auftreten. Wir erhalten demnach für den Fall überwiegender partieller Reflexion ein Theorem, das im Gegensatz zum Martynschen keinen Cosinus-Faktor zeigt.

Die eben für den Fall einer linearen Polarisation senkrecht zur Einfallsebene angegebene Methode kann grundsätzlich auch auf den Fall der anderen Hauptpolarisationen angewandt werden, vorausgesetzt, daß das Gradientenglied keine Rolle spielt. Das ist immer dann der Fall, wenn die Variation der Daten auf die Entfernung einer Wellenlänge klein bleibt, d. h. im Falle der dicken Schichten. Die wellenoptische Definition der „dicken Schichten“ ist in einer früheren Arbeit (Rawer³) präzisiert worden; wir dürfen wieder-

³) K. Rawer, Ann. Physik 35, 385 (1939); 42, 294 (1942).

holen, daß praktisch nur Schichten, die eine Dicke haben, die wesentlich kleiner als die Wellenlänge ist, als dünn angesehen werden müssen. Die meisten Ionosphären-Schichten sind in diesem Sinne dicke Schichten, so daß wir feststellen können, daß die beiden Polarisationen in diesen Fällen dasselbe Resultat liefern müssen. Damit ist auch festgestellt, daß jede beliebige andere Polarisation, die sich ja aus den beiden Hauptpolarisationen zusammensetzen läßt, zum gleichen Ergebnis führt.

Betrachten wir nun den speziellen Fall, daß die Stöße einen überwiegenden Einfluß ausüben. Wir müssen uns für diesen Fall die Frage stellen, wie das Dekrement von den Stößen abhängt. Nun wird im Falle mäßiger Absorption, wie die Dispersions-Theorie zeigt, das lokale Absorptions-Dekrement proportional der Stoßzahl; in diesem Falle ist das Verhältnis von Nenner und Zähler in (10) einfach durch das Verhältnis der Stoßzahlen, nämlich $\cos \alpha_0$, gegeben. Wir finden so bei überwiegendem Stoßeinfluß $a = \cos \alpha_0$ und damit das Martynsche Theorem.

Die Linearität des Absorptionseinflusses als Funktion der Stoßzahl wird nicht mehr gelten, wenn die lokale Absorption sehr hoch wird. Diese Fälle haben Arzélies und Argence⁴⁾ strahlenoptisch untersucht. Es ist zu bedenken, daß die „Absorptionsflächen“, nämlich die Flächen gleicher Amplitude, nicht mit den „Wellenflächen“, nämlich den Flächen gleicher Phase, übereinstimmen. Die Verhältnisse können übersehen werden, wenn wir von der Wellengleichung (2) zur Eikonal-Gleichung übergehen. Wir machen hierzu nach Sommerfeld und Runge⁵⁾ den Eikonal-Ansatz

$$\mathbf{E} \sim \exp i \frac{\omega}{c} S. \quad (11)$$

Damit gilt strahlenoptisch die Eikonalgleichung

$$(\nabla S)^2 = \varepsilon, \quad (12)$$

wobei wir wegen des komplexen ε einen komplexen Eikonal-Gradienten

$$\nabla S = \mathbf{P} + i \mathbf{A} \quad (13)$$

einführen müssen (Suchy⁶⁾). Hierin gibt \mathbf{P} bzw. \mathbf{A} jeweils die Richtung der Phasen- bzw. Amplituden-Ausbreitung. Die Eikonalgleichung schreibt sich damit

$$\mathbf{P}^2 - \mathbf{A}^2 = \operatorname{Re} \varepsilon \quad 2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \operatorname{Im} \varepsilon. \quad (14)$$

Hiermit sind \mathbf{P} und \mathbf{A} jedoch nicht eindeutig bestimmt. Wir benutzen daher noch das differentielle Brechungsgesetz von Sommerfeld und Runge⁵⁾

$$\nabla X (\mathbf{P} + i \mathbf{A}) = 0. \quad (15)$$

Für seine Integration legen wir die erste Schar Koordinatenflächen parallel zur Schichtung der Ionosphäre, die dritte parallel zur EinfallsEbene, die zweite senkrecht dazu. Das gibt die Randbedingung $P_{30} = 0$. Da ferner das Ausgangs-Medium absorptionsfrei ist, so ist $A_0 = 0$. Hiermit ergibt das Brechungsgesetz zunächst

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}_1,$$

⁴⁾ H. Arzélies, Ann. Physique, Paris **2**, 133–194 (1947); C. R. Acad. Sci. Paris **235**, 421 (1952); **235**, 1619 (1952); E. Argence, Z. Geophysik **21**, 1 (1956).

⁵⁾ A. Sommerfeld u. J. Runge, Ann. Physik **35**, 277 (1911).

⁶⁾ K. Suchy, Ann. Physik **11**, 113 (1952); [Berichtigung dazu: **12**, 423 (1953)].

wenn e_1 der Einheitsvektor senkrecht zur Schichtung ist. Führen wir noch den Winkel α zwischen P und A ein, so liefert die Integration des Brechungsgesetzes (15) weiterhin

$$g_2 P \sin \alpha = g_{20} \sin \alpha_0.$$

(Bei ebener Schichtung, d. h. cartesischen Koordinaten, ist $g_2 = 1$, bei Berücksichtigung der Erdkrümmung durch Zylinderkoordinaten ist $g_2 = r$.)

Mit diesen Ergebnissen des Brechungsgesetzes gibt die Eikonalgleichung (14):

$$P^2 \cos^2 \alpha + \frac{g_{20}^2}{g_2^2} \sin^2 \alpha_0 - A^2 = \operatorname{Re} \varepsilon, \quad 2 P A \cos \alpha = \operatorname{Im} \varepsilon,$$

zusammengefaßt⁷⁾

$$\frac{2 P^2 \cos^2 \alpha}{2 A^2} \left\{ \right\} = \pm \left(\operatorname{Re} \varepsilon - \frac{g_{20}^2}{g_2^2} \sin^2 \alpha_0 \right) + \sqrt{\left(\operatorname{Re} \varepsilon - \frac{g_{20}^2}{g_2^2} \sin^2 \alpha_0 \right)^2 + \operatorname{Im}^2 \varepsilon}. \quad (16)$$

Nun ist im Fall der Sellmeierschen Dispersionsformel (6):

$$\operatorname{Re} \varepsilon = 1 - \frac{X}{1 + Z^2} \quad \operatorname{Im} \varepsilon = \frac{Z X}{1 + Z^2}. \quad (17)$$

Wenn Z oder X genügend klein ist, können wir die Wurzel entwickeln und erhalten

$$A \approx \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{2 \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon - \frac{g_{20}^2}{g_2^2} \sin^2 \alpha_0}} = \frac{Z X / (1 + Z^2)}{2 \sqrt{1 - \frac{g_{20}^2}{g_2^2} \sin^2 \alpha_0 - \frac{X}{1 + Z^2}}}. \quad (18)$$

Mit dem Eikonalansatz $E \sim \exp i \frac{\omega}{c} S$ wird das Reflexionsvermögen

$$|R|^2 = \exp \left(-2 \frac{\omega}{c} \int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \right), \quad (19)$$

also das Dekrement

$$\delta = 2 \frac{\omega}{c} \int dh A. \quad (20)$$

Für kleines Z oder X bekommen wir mit der obigen Entwicklung für A

$$\delta(\alpha_0, \omega, v) = \frac{1}{c} \int dh \frac{v}{\omega} \frac{\omega^2 X / (1 + Z^2)}{\sqrt{\omega^2 \left(1 - \frac{g_{20}^2}{g_2^2} \sin^2 \alpha_0 \right) - \frac{\omega^2 X}{1 + Z^2}}}. \quad (21)$$

Weil X proportional ω^{-2} ist, bedeutet das für ebene Schichtung ($g_2 = 1$) zunächst

$$\delta(\alpha_0, \omega, v) = \delta(0, \omega \cos \alpha_0, v \cos \alpha_0). \quad (22)$$

(22) ist mit der wellenoptisch abgeleiteten Relation (8) identisch. Nur für $Z^2 \ll 1$ ist das Dekrement einfach proportional der Stoßzahl und damit

$$\delta(\alpha_0, \omega, v) = \cos \alpha_0 \cdot \delta(0, \omega \cos \alpha_0, v). \quad (23)$$

Hier gilt also das Martynsche Theorem.

Die Erdkrümmung lässt sich durch ein solches Äquivalenz-Theorem nicht mit berücksichtigen, denn hierfür wäre $g_2 = r$ von der Höhe h abhängig und somit auf dem Integrationsweg variabel.

⁷⁾ E. Argence, K. Rawer u. K. Suchy, C. R. Acad. Sci. Paris 241, 505 (1955).

Die von uns benutzte Sellmeiersche Dispersionsformel (6) ist für die Ionosphäre nur eine erste Näherung. Der Einfluß des Erdmagnetfeldes ist tatsächlich erheblich, vor allem auf relativ niedrigen Frequenzen. Man könnte daran denken, auch diesen Einfluß in ähnlicher Weise zu behandeln, wie wir oben verfahren sind, nämlich durch Variation der Parameter. Die zusätzlichen Parameter, die in der Appleton-Hartee-Formel auftreten, sind die Daten des Magnetfeldes, charakterisiert etwa durch zwei Winkel und die Gyrofrequenz. Wir haben versucht, eine solche Variation der Parameter einzuführen, die im wesentlichen auf eine Variation der Gyrofrequenz hinauskäme. Die entscheidende Schwierigkeit, die wir nicht überwinden konnten, ist die, daß die Dispersionsformel von der Ausbreitungsrichtung abhängt und dadurch das ganze Problem unübersichtlich wird, weil die Winkel, die einzusetzen sind, längs des Wegs der Welle innerhalb des Mediums sich verändern. In der Strahlenbehandlung heißt das, daß der örtlich variable Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung und Magnetfeld unter dem Integral (20) steht. Es ist immer die gleiche Schwierigkeit, an der sich die Überlegungen bei der Behandlung des Ionosphärenplasmas stoßen; das Erdmagnetfeld erschwert durch seine Richtungsabhängigkeit die mathematische Behandlung außerordentlich.

Wir dürfen zusammenfassend feststellen, daß unsere Überlegungen das Martynsche Theorem nur unter drei Voraussetzungen bestätigt haben: 1. daß der Reflexionskoeffizient nicht durch die partielle Reflexion, sondern durch die Stöße überwiegend bestimmt ist, 2. daß der Zusammenhang zwischen Absorptionsdekrement und Stößen linear ist und 3. daß der Einfluß des Erdmagnetfeldes außer acht gelassen werden darf. Die beiden ersten Voraussetzungen sind verhältnismäßig sicher in den meisten interessierenden Fällen erfüllt, zumindest im Bereich der Dekameterwellen, der üblicherweise betrachtet wird. Dagegen könnte der Einfluß des Erdmagnetfeldes eine wesentliche Rolle spielen. Das wäre durch spätere Untersuchungen zu klären.

Breisach, Rhein, Ionosphäreninstitut im Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost und

Zürich, Promenadengasse 18.

Bei der Redaktion eingegangen am 23. Oktober 1957.

M
und
bei
Maxi
Maxi
kleine
perat

D
titane
von
Größ
bleibe
wesen
Wert
gewo

Wisse
word
ledig
diese
Die
bei
U
quen

1)
insti
horst

2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)
9)
10)

Dielektrische Eigenschaften von Bariumtitanat bei hohen Frequenzen und tiefen Temperaturen

Von H. Rabenhorst und J. Melicherčík¹⁾

Mit 2 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Mit einem Hohlraumresonator werden die Dielektrizitätskonstante ϵ und der Verlustfaktor $\operatorname{tg} \delta$ von Bariumtitanat zwischen -180° und $+20^\circ$ C bei einer Frequenz von $9,1 \cdot 10^9$ Hz gemessen. Dabei ergibt sich, daß neben den Maxima von ϵ bei den Umwandlungspunkten -10° und -70° C ein drittes Maximum im Bereich zwischen -160° und -180° C auftritt. Der auch bei kleinen Frequenzen beobachtete Abfall von ϵ und $\operatorname{tg} \delta$ mit fallender Temperatur konnte auch bei der hohen Frequenz beobachtet werden.

Die Dielektrizitätskonstante ϵ und der Verlustfaktor $\operatorname{tg} \delta$ sind an Bariumtitanat zwischen 0° C und dem Curiepunkt ($+120^\circ$ C) bis zu Frequenzen von $2,4 \cdot 10^{10}$ Hz gemessen worden²⁻⁵⁾. Dabei zeigte sich, daß die beiden Größen bis zur Relaxationsfrequenz von etwa 10⁹ Hz im wesentlichen konstant bleiben. Erst bei noch höheren Frequenzen nimmt ϵ stark ab und $\operatorname{tg} \delta$ wird wesentlich größer. Bei 10¹⁰ Hz hat nach Powles ϵ nur noch $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{3}$ des Wertes, den es bei kleinen Frequenzen hatte. $\operatorname{tg} \delta$ ist ungefähr 100mal größer geworden.

Entsprechende Messungen nach tiefen Temperaturen sind nach unserem Wissen nur bei Frequenzen unterhalb der Relaxationsfrequenz durchgeführt worden^{2) 6-10)}. Danach nehmen ϵ und $\operatorname{tg} \delta$ bis zu 4,2° K kontinuierlich ab, lediglich bei etwa -10° C und -70° C hat ϵ ein schwaches Maximum. Bei diesen Temperaturen ändert sich die Kristallstruktur des Bariumtitanats. Die genaue Lage dieser Maxima hängt wegen der Hysteresis davon ab, ob bei fallender oder steigender Temperatur gemessen wird.

Um nun auch das Verhalten der dielektrischen Größen bei hohen Frequenzen und tiefen Temperaturen kennenzulernen, haben wir an keramischen

¹⁾ Die vorliegenden Messungen wurden von J. Melicherčík vom Forschungsinstitut für elektrotechnische Physik (VÚPEF) in Prag in Zusammenarbeit mit H. Rabenhorst in der Zeit vom Juli 1956 bis Februar 1957 im Heinrich-Hertz-Institut durchgeführt.

²⁾ A. R. v. Hippel u. Mitarb., Ind. Engng. Chem. **38**, 1097 (1946).

³⁾ H. Nowosiljew u. A. Chodakow, Ž. techn. Physik **18**, 651 (1947).

⁴⁾ D. J. Mash, J. exp. theoret. Physik UdSSR **17**, 537 (1947).

⁵⁾ J. G. Powles, Nature **162**, 614.

⁶⁾ B. Wul, J. exp. theoret. Physik UdSSR **15**, 735 (1945).

⁷⁾ B. T. Matthias u. A. v. Hippel, Physic. Rev. **78**, 1378 (1948).

⁸⁾ W. Mey, Physic. Rev. **81**, 1064 (1951).

⁹⁾ S. Roberts, Physic. Rev. **7**, 890 (1947).

¹⁰⁾ R. F. Blunt u. W. F. Love, Physic. Rev. **76**, 1202 (1949).

Bariumtitanat ϵ und $\operatorname{tg} \delta$ zwischen -180° und $+20^\circ\text{C}$ mit einem Hohlraumresonator bei $9,1 \cdot 10^9$ Hz gemessen.

Für die Messungen wurde ein Resonator mit kreisförmigem Querschnitt (4,8 cm Durchmesser) verwendet, in dem eine H_{01} -Welle angeregt war. Der grundsätzliche Aufbau des Resonators (bis auf den geänderten Durchmesser) und die Meßmethode für ϵ sind in einer früheren Arbeit angegeben¹¹⁾. Zur Messung von $\operatorname{tg} \delta$ mußte zusätzlich die Güte des Resonators mit und ohne Meßprobe gemessen werden¹²⁾. Der leere Resonator hat eine Güte von 3000. Die Meßgenauigkeit beträgt dann für $\epsilon \pm 2\%$ und für $\operatorname{tg} \delta \pm 5\%$.

Zur Abkühlung der Meßprobe bis -180°C wurde der Resonator teilweise in ein Gefäß mit flüssiger Luft eingetaucht (Abb. 1). Gemessen wurde während der langsamten Erwärmung des ganzen Systems bis Zimmertemperatur.

Die Temperatur wurde direkt an der Meßprobe mit einem Widerstandsthermometer ermittelt. Um zu vermeiden, daß sich während der Messung im Resonator Eis bildet, mußte laufend getrocknete Luft durchgeleitet werden. Dazu wurde diese Luft durch mehrere hintereinander geschaltete Trockentürme und

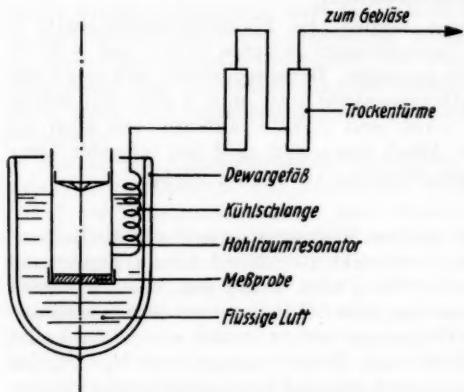


Abb. 1. Schema der Meßanordnung

Tabelle 1

v Hz	ϵ	$\operatorname{tg} \delta$
10^3	1250	10^{-2}
$9,1 \cdot 10^9$	255	0,5

daran anschließend durch eine Kühlslange, die in flüssige Luft eingetaucht war, geleitet.

Die Messungen wurden an mehreren keramischen Bariumtitanatscheiben von 4,7 cm Durchmesser und 0,1–0,2 cm Dicke ausgeführt. Dem Bariumtitanat war 4% Bleititanat beigemischt¹³⁾. Für dieses Mischverhältnis liegt der Curiepunkt nur wenig über dem des reinen Bariumtitanats¹⁴⁾. In Tab. 1 sind für 10^3 und $9,1 \cdot 10^9$ Hz die bei Zimmertemperatur gemessenen Mittelwerte von 6 Proben angegeben.

Diese Werte sind in recht guter Übereinstimmung mit den von Jackson und Powles⁶⁾ an reinem Bariumtitanat gemessenen Werten $\epsilon = 280$, $\operatorname{tg} \delta = 0,52$, da nach Smolenski¹⁴⁾ mit zunehmendem Bleititanatgehalt die DK abnimmt. Der Verlauf der Temperaturabhängigkeit von ϵ und $\operatorname{tg} \delta$

¹¹⁾ F. Eckardt u. H. Rabenhorst, Ann. Physik (6) **19**, 381 (1957).

¹²⁾ F. Horner, T. A. Taylor, R. Dunsmuir, J. Lamb u. W. Jackson, Inst. Electr. Engrs. **93**, 58 (1946).

¹³⁾ Die untersuchten Bariumtitanatscheiben wurden in der Tschechoslowakei hergestellt und werden dort und anderem als Ultraschallschwinger verwendet.

¹⁴⁾ G. A. Smolenski, I. techn. Phys. UdSSR **20**, 137, 148 (1950).

in dem genannten Temperaturbereich ist bei allen Meßproben annähernd gleich. In Abb. 2 sind für eine der Meßproben die beiden Kurven dargestellt. Ähnlich wie bei tiefen Frequenzen hat auch hier ϵ bei -10° und -70° C ein Maximum entsprechend der Umwandlung der Kristallstruktur. Neben diesen bekannten Maxima zeigen alle gemessenen Bariumtitanatscheiben ein weiteres sehr breites Maximum von ϵ im Bereich zwischen -160° und -180° C, welches mit einem entsprechenden Minimum von $\operatorname{tg} \delta$ verbunden ist. Die Größe

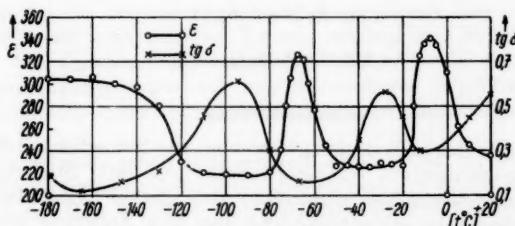


Abb. 2. DK ϵ und Verlustwinkel $\operatorname{tg} \delta$ von keramischem Bariumtitanat + 4% Bleititanat bei $9.1 \cdot 10^6$ Hz

des Anstieges liegt weit über der angegebenen Meßgenauigkeit: Es ist aber nicht bekannt, daß in diesem Temperaturbereich eine weitere Änderung der Kristallstruktur stattfindet. Der geringe Zusatz von Bleititanat kann für das Auftreten eines dritten Maximums nicht verantwortlich gemacht werden. Nach G. Shirane und K. Suzuki¹⁵⁾ bewirkt das Bleititanat nur eine ganz schwache Verschiebung der Umwandlungsmaxima nach tiefen Temperaturen, die aber erst für größere Prozente von Bleititanat wirksam werden. Ein drittes Maximum wurde von den Autoren bei einer Meßfrequenz von 10^6 Hz nicht beobachtet*). Eine endgültige Deutung des Verhaltens läßt sich aber erst dann geben, wenn der genaue Verlauf des Maximums nach Temperaturen unter -180° C verfolgt werden kann. Solche Messungen sind aber zur Zeit mit unserer Apparatur nicht möglich. Sie sollen zu einem späteren Zeitpunkt nachgeholt werden.

Der erwähnte Abfall von ϵ und $\operatorname{tg} \delta$ mit sinkender Temperatur bei tiefen Frequenzen zeigt sich, allerdings wesentlich schwächer, auch bei $9.1 \cdot 10^6$ Hz, jedenfalls bis zu etwa -110° C. Nach tieferen Temperaturen wird dieser Effekt von dem folgenden sehr breiten Maximum verdeckt.

J. Melicherčík möchte nochmals Herrn Prof. Dr. O. Hachenberg für die jederzeit gewährte freundliche Unterstützung recht herzlich danken.

¹⁵⁾ G. Shirane u. K. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **6**, 274 (1951).

*) Anmerkung bei der Korrektur: J. Melicherčík hat bei 1 kHz Meßfrequenz das Maximum von ϵ in der Umgebung von -160° C ebenfalls festgestellt.

Berlin-Adlershof, Heinrich-Hertz-Institut.

Bei der Redaktion eingegangen am 1. November 1957.

Über die Beweglichkeit positiver Ionen in extrem reinen Gasen und Gasgemischen^{1) 2)}

Von R. Maushart

Mit 7 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Unter extrem sauberen Bedingungen werden die Beweglichkeiten positiver Ionen in Argon-Sauerstoff-, Stickstoff-Sauerstoff- und Stickstoff-Sauerstoff-Wasserdampf-Gemischen untersucht und daraus Aussagen über die Art der vorhandenen Ionenkomplexe und über ihre Änderung mit dem Mischungsverhältnis gewonnen.

I. Einleitung

Mit jeder experimentellen Bestimmung der Ionenbeweglichkeit in einem Gase verbindet sich gleichzeitig die Frage nach der Art der Ionen, denen der gemessene Beweglichkeitswert zugeordnet werden muß.

Selbst bei extrem reinen Meßgasen hat man es durchaus nicht immer mit den beim Ionisationsprozeß primär erzeugten Ionen zu tun. Anlagerungsvorgänge können zu höhermolekularen Komplexen führen, deren Größen und Bildungswahrscheinlichkeiten im Regelfall von Druck und Temperatur des Gases und von der Stärke des elektrischen Meßfeldes abhängen. Typische Beispiele dafür bieten die Edelgasmolekülionen oder der N_4^+ -Komplex in Stickstoff.

Enthalten die Meßgase auch noch geringfügige Zusätze von Fremdgasen, dann ergeben sich weitere Möglichkeiten für die Veränderung der Primärionen durch Umladung oder durch die Bildung von Komplexen mit den Molekülen eben dieser Zusatzgase.

Nun lassen sich aber aus einem einfachen Beweglichkeitsmeßwert nur ausnahmsweise sichere Angaben über die zugehörigen Ionen machen, da in die theoretischen Ausdrücke für die Ionenbeweglichkeit stets mehrere Eigenschaften des wandernden Ions, wie etwa Masse und Stoßquerschnitt, gleichzeitig eingehen. Wenn man dagegen in Gasgemischen geeigneter Zusammensetzung den Gang der Beweglichkeit bis hinunter zu außerordentlich kleinen Konzentrationen des einen Mischungsanteils verfolgt, wird man daraus oft weitgehende Schlüsse ziehen können über die Natur der Ionen auch in den einzelnen Reingasen selbst.

Saubere Messungen dieser Art erfordern allerdings vakuumtechnisch einwandfreie Methoden und besonders gereinigte Gase.

¹⁾ Vorgetragen auf der Frühjahrstagung der Physikalischen Gesellschaft Württemberg-Baden-Pfalz e. V. 1957 in Tübingen.

²⁾ Auszug aus einer Karlsruher Dissertation 1956.

Weiterhin ist eine praktisch thermische Geschwindigkeit der betreffenden Ionen wünschenswert, da die Beweglichkeitstheorien von Langevin und von Hassé-Cook eine Maxwellsche Energieverteilung der Ionen voraussetzen. Nach Wannier³⁾ ist diese Voraussetzung erfüllt für

$$(M/m + m/M) e E \lambda \ll k T \quad (1)$$

(M = Masse der Gasmoleküle, m = Masse der Ionen, E = Feldstärke des elektrischen Meßfeldes.)

Die Einführung des Meßgasdruckes p in diese Ungleichung ergibt, daß E/p demnach bei der Beweglichkeitsbestimmung kleiner sein muß als einige Volt/cm Torr, wenn man mit der Theorie vergleichbare Resultate erhalten will. Auch bei Untersuchungen der Beweglichkeit von Ionenkomplexen wird man zweckmäßigerweise mit möglich niedrigen E/p -Werten arbeiten, da solche Komplexe durch höhere als thermische Stoßenergien leicht zerstört werden.

Die bisher gebräuchlichen Meßverfahren ermöglichen bei den hier interessierenden Gasen Beweglichkeitsmessungen bis herab zu E/p -Werten von etwa 10 Volt/cm Torr. Man ist daher auf Extrapolation der Beweglichkeitswerte zu verschwindend kleinem E/p hin angewiesen. Hornbeck⁴⁾ schätzt den Fehler bei dieser Extrapolation auf etwa 10%, „because the correct procedure for the extrapolation to zero field is not known“.

Bei der im folgenden beschriebenen neuartigen Meßanordnung werden die Ionen durch Alphateilchen erzeugt. Man erreicht so Meßdrücke von einigen 100 Torr und damit ausreichend niedrige E/p -Werte, ohne das Meßfeld zu sehr schwächen zu müssen.

II. Meßanordnung

Bei seinen Untersuchungen über die Beweglichkeitsstreuung von gleichaltrigen Ionen hat Stetter⁵⁾ erstmals die Ionenkolonne eines einzelnen Alphateilchens verwendet. Neuerdings sind mit einem solchen Ionisationsverfahren auch von Burger⁶⁾ Beweglichkeiten gemessen worden. Aus den Ansätzen dieser beiden Arbeiten heraus wurde die hier beschriebene Anordnung entwickelt.

Zwischen zwei ebenen parallelen Platten liegt ein homogenes elektrisches Feld. Senkrecht zum Feld werden Alphateilchen eingeschossen. Jedes Teilchen erzeugt längs seiner Bahn eine Kolonne positiver Ionen und trifft dann auf einen Zinksulfidschirm am Boden der Meßkammer. Durch den ausgelösten Scintillationsblitz ist der Zeitpunkt der Ionenentstehung festgelegt. Der Lichtblitz startet über einen Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) die Horizontalauslenkung des registrierenden Oszillographen.

Die Ionen der Kolonne wandern im Feld bis zur negativen Platte. In der Platte befindet sich ein schmales Influenzschutzzitter und unmittelbar dahinter eine Auffängerelektrode. Ein Teil der Ionen tritt durch das Gitter hindurch und bewirkt nun am Auffänger einen Spannungsimpuls, der nach der notwendigen Verstärkung vom Oszillographen aufgezeichnet wird. Der Ab-

³⁾ G. H. Wannier, *Physic. Rev.* **83**, 281 (1951); **87**, 795 (1952).

⁴⁾ J. A. Hornbeck, *Physic. Rev.* **84**, 616 (1951).

⁵⁾ G. Stetter, *Physik. Z.* **33**, 294 (1932).

⁶⁾ A. Burger, Diss. Karlsruhe 1954 (unveröffentlicht).

stand dieses Impulses von der Nullage zu Beginn der Horizontalauslenkung stellt somit ein Maß dar für die Laufdauer der Ionen zwischen Einschuß und Auffänger. Nun kann man aber den Abstand zwischen Alphateilchenbahn und Auffänger nur ziemlich ungenau bestimmen. Weiter wird in der unmittelbaren Nähe des Influenzschutzzitters das Meßfeld unkontrollierbar verzerrt

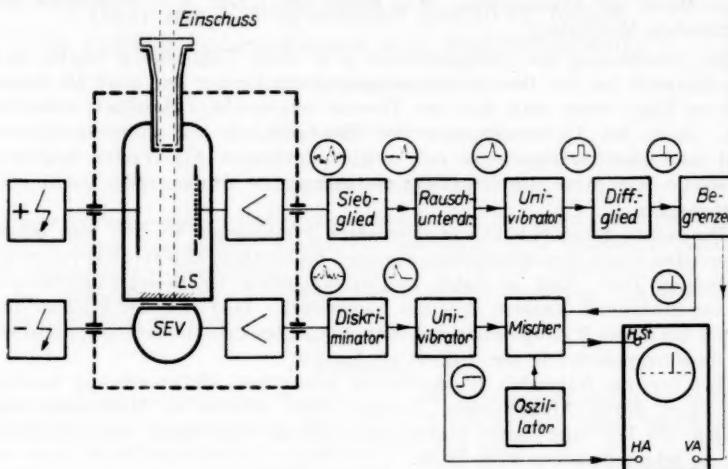


Abb. 1. Schematische Darstellung der Meßanordnung

sein. Deshalb wird zur Messung in verschiedenen Abständen vom Auffänger eingeschossen. Man erhält dann zwei verschiedene lange Ionenlaufstrecken und damit zwei getrennte Impulse auf dem Oszillographenbildschirm, deren zeitliche Entfernung der Laufdauer der Ionen zwischen den beiden Einschußstellen entspricht. Der Abstand der beiden Einschußachsen läßt sich sehr genau messen. Infolge der Differenzbildung der beiden Laufstrecken sind Randstörungen des Meßfeldes ohne Einfluß.

Um für jeden Einschuß einen definierten Ort zu erhalten, werden die Alphateilchen vor und nach ihrem Durchgang durch das Meßfeld durch zwei jeweils gleiche Blenden ausgeblendet. Eine Ionenkolonne gelangt also nur dann zur Messung, wenn sie von einem Teilchen erzeugt worden ist, dessen Bahn innerhalb eines Zylinders vom Querschnitt der Blendenöffnungen verläuft.

Aus Intensitätsgründen kann man die Alphastrahlen nicht beliebig scharf ausblenden. Die Laufstrecke der einzelnen Ionenkolonnen schwankt daher mit der zufälligen Lage des einzelnen Alphastrahls innerhalb des Ausblendungszylinders. Der dadurch entstehende Fehler wird sehr klein, wenn man die Impulse sehr vieler Kolonnen auf dem gleichen Filmbild aufnimmt. Dazu muß man die ursprünglich dreiecksförmigen Impulse in sehr schmale Rechtecke umformen, die auf dem Oszillographenbildschirm nur noch als Striche erscheinen. Wenn nun auf einer photographischen Aufnahme des Bildschirms genügend viele solcher Impulse registriert werden, so ergibt sich für jeden der beiden Einschüsse ein zusammenhängender Streifen von Impulsen.

R. Ma...
bildern
genau
an Ha...
der be...
meßba...
der Ic...
Au...
und Ze...

Das
Aufba...
führlic...

Die
spanne...
Die
in die
sinken
peratu...
Sauer...
partial...
einem
Das
Einsat...

Die
entwick...

bildern, dessen Breite vom Blendendurchmesser bedingt wird und dessen Mitte genau der Achse eines Einschußzylinders entspricht. Man braucht nur noch an Hand der gleichfalls aufgenommenen Zeitmarken den zeitlichen Abstand der beiden Streifenmitten zu bestimmen, um zusammen mit dem sehr genau messbaren Abstand der zwei Blendensysteme die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen zu erhalten.

Auf solche Weise wird erreicht, daß die Endpunkte von Ionenlaufstrecke und Zeitmeßstrecke eindeutig und scharf zusammenfallen.

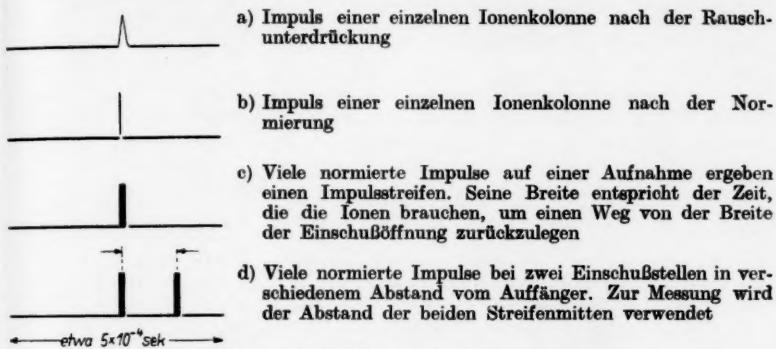


Abb. 2. Typische Schirmbildaufnahmen von Meßimpulsen

Das Elektrodensystem und seine Halterung in der Meßröhre ist ebenso wie Aufbau und Anordnung des Influenzschutzgitters bei Pollermann⁷⁾ ausführlich beschrieben.

III. Vorbereitung und Durchführung der Messungen

Gasreinigung

1. Edelgase

Die als spektralrein bezogenen Edelgase wurden über glühenden Calciumspänen in einem thermischen Kreislauf weitergereinigt.

Die Wirksamkeit dieser Reinigung läßt sich dadurch ermitteln, daß man in die evakuierte Apparatur kleine Mengen Sauerstoff einfüllt und das Absinken des Druckes verfolgt. Man erreicht nach einigen Tagen bei Temperaturen von 340 bis 360°C Drucke von 10^{-5} Torr. Bringt man statt reinem Sauerstoff Edelgas und Sauerstoff ein, so wird auch dort der Sauerstoffpartialdruck auf die gleiche Größenordnung absinken. Das entspricht bei einem Edelgasdruck von 100 Torr einem Reinheitsgrad von $1:10^{-7}$.

Das zeitliche Fortschreiten der Reinigung erkennt man aus dem Gang der Einsatzspannung für eine Glimmentladung in dem zu reinigenden Gemisch.

2. Stickstoff und Sauerstoff

Diese beiden Gase werden aus Natriumazid bzw. Kaliumpermanganat entwickelt. Dabei werden alle üblichen Reinigungsmaßnahmen angewandt,

⁷⁾ M. Pollermann, *Bauelemente der physik. Technik*, Springer Verlag 1955, S. 243.

wie Ausheizen der Salze bis knapp unter die Gasentwicklungstemperatur, Abpumpen der zuerst entwickelten Gasmengen, und langsame Durchströmung von zwei hintereinander liegenden Kühlfallen, die mit flüssigem Stickstoff gekühlt werden.

Die hier verwendeten Vorratsgefäße haben ebenso wie diejenigen für die Edelgase einen mit einer Glasfeder versehenen Ansatzstutzen, mit dem sie später an die Meßapparatur angeschmolzen werden. Sie sind vor ihrer Füllung vier Stunden lang bei 385°C ausgeheizt worden.

3. Wasserdampf

Die kleinen Glaskölbchen für die Wasserdampfzusätze sind zur Füllung mit einer bekannten Menge Wasserdampf an ein größeres Gefäß bekannten Volumens angeschmolzen. In einen Ansatzstutzen wird im Vakuum Wasser destilliert. Dann läßt man im ganzen System den Wasserdampfdruck sich einstellen, der der Umgebungstemperatur entspricht. Der Stutzen mit dem flüssigen Wasser wird abgetrennt, der gesamte Dampf in einem der Vorratskölbchen eingefroren und das Kölbchen abgezogen.

Füllung

Die Glasbehälter mit den Meßgasen werden über eine Kühlalde mit der Meßröhre verbunden. Die Zusatzkölbchen für Fremdgase sind unmittelbar an der Meßröhre angebracht.

Vor jeder Füllung wird die Meßröhre 6 Stunden lang bei 350°C ausgeheizt. Anschließend wird die Leitung zur Diffusionspumpe abgeschmolzen, die Glasfeder des Gasvorratsgefäßes mit einer in Glas eingeschmolzenen Eisenkugel zertrümmert, Druck wie Temperatur gemessen und die Meßröhre abgezogen.

Bei der Herstellung von Sauerstoff-Stickstoff-Mischungen ist das Volumen der Gasvorratsgefäße zuvor durch Auswiegen mit Wasser ermittelt worden. Das Mischungsverhältnis im Meßgefäß läßt sich dann aus den bekannten Mengen der Einzelgase ermitteln.

Gemessen wird ohne Ausnahme im abgeschmolzenen System.

Zur Einstellung verschiedener Wasserdampfpartialdrücke werden nacheinander mehrere Zusatzkölbchen zertrümmert, die eine bekannte Wasserdampfmenge enthalten. Nach 12 Stunden ist der Wasserdampf gleichmäßig im System verteilt, wie durch laufende Messungen leicht ermittelt werden kann.

Wie sich aus entsprechenden Literaturangaben abschätzen läßt, kann durch Belegung der ausgeheizten Glas- und Metalloberflächen der Wasserdampfgehalt im ungünstigsten Fall um 1% des niedrigsten Wasserdampfzusatzes vermindert werden⁸⁾.

Messung

Die Messungen werden gewöhnlich bei einem Gasdruck von 150 bis 200 Torr durchgeführt. Der verwendbare Druckbereich wird nach hohen Drucken hin durch die Reichweite der Alphateilchen in dem betreffenden Meßgas begrenzt. Andererseits muß die Feldstärke mindestens so groß sein, daß während der Laufzeit der Ionen die Kolonne noch nicht merklich auseinanderdiffundieren kann.

8) C. C. Mönch, Hochvakuumtechnik, A. Lang Verlag Pößneck 1950, S. 22.

D
sind, I
stoff I
zeitlic
Druck
lichkei

Ei
Andere

Für
Gl. (2)
die Ap
De
aus de
lassen
Die G
Mittel
Den g
Werte
lichkei

Für
noch e
Abstän
genau
Da
von ±

IV. A

Mi
in eine
bekann
des St
Ionen
deren
gleich
schnit

Die
und E

9)
1, 139

Die niedrigsten E/p -Werte, bei denen noch sichere Messungen möglich sind, liegen daher in Edelgasen bei 0,2 Volt/cm Torr, in Stickstoff und Sauerstoff bei 1,5 bis 2 Volt/cm Torr. Aus Plattenspannung V , Plattenabstand a , zeitlicher Entfernung t der Streifenmittten, Achsenabstand s der Blenden, Druck p und Temperatur T wird die auf 0°C und 760 Torr reduzierte Beweglichkeit berechnet nach

$$b^{760} = (s \cdot a \cdot p \cdot 273,3) / (V \cdot t \cdot 760 \cdot T) \text{ cm}^2/\text{Voltsek.} \quad (2)$$

Ein anderer Einfluß der Temperatur auf die Beweglichkeit als durch die Änderung der Gasdichte ist dabei nicht berücksichtigt worden.

Fehlerabschätzung

Für eine Abschätzung des Meßfehlers spaltet man die rechte Seite der Gl. (2) am besten in drei Teile auf: in die unmittelbaren Meßgrößen V und t , die Apparatekonstante $K = s \cdot a$ und den Reduktionsfaktor $(p/760)/(273/T)$.

Der relative Fehler zweier Messungen untereinander setzt sich zusammen aus dem Fehler der Meßgrößen und den Fehler des Reduktionsfaktors. p und T lassen sich ohne Schwierigkeiten auf 0,2 bzw. 0,1% insgesamt genau bestimmen. Die Genauigkeit bei der Messung des Streifenabstands t kann man durch Mittelwertbildung aus mehreren Aufnahmen auf 0,5% insgesamt steigern. Den größten Fehler bringt mit $\pm 1\%$ die Spannungsmessung. Aus allen diesen Werten ergibt sich ein Relativfehler von $\pm 1,4\%$. Die gemessenen Beweglichkeiten waren durchweg innerhalb dieser Fehlergrenzen reproduzierbar.

Für die Bestimmung der Absolutgröße der Beweglichkeit muß zusätzlich noch der Fehler der Apparatekonstante K in Rechnung gestellt werden. Die Abstände a und s lassen sich mit den vorhandenen Mitteln sicher auf $1/10$ mm genau bestimmen, entsprechend einem Fehler von 0,2 bzw. 0,8%.

Daraus folgt* für die gemessenen Beweglichkeitswerte ein Gesamtfehler von $\pm 2,5\%$.

IV. Abhängigkeit der Beweglichkeit von den Eigenschaften der Ionen und des Trägergases

a) Unveränderliche Ionen

Mit der Gleichung von Langevin⁹⁾ kann die Beweglichkeit von Ionen in einem Gas berechnet werden, wenn Masse und Stoßquerschnitt der Ionen bekannt sind. Nur in wenigen Fällen, etwa bei Atomionen, bleibt der Einfluß des Stoßquerschnitts so klein, daß die Beweglichkeit eine Funktion allein der Ionenmasse wird. Man kann daher unbekannte Ionen und Ionenkomplexe, deren Beweglichkeit man gemessen hat, nicht an Hand der Langevin-Gleichung identifizieren. Es lassen sich lediglich für Masse und Stoßquerschnitt obere Grenzen abschätzen.

Die Beweglichkeit b_{AB} von Ionen in einem Gemisch aus zwei Gasen A und B mit den relativen Anteilen f_A und f_B ist gegeben durch die Beziehung

$$1/b_{AB} = f_A/b_A + f_B/b_B = f_A/b_A + (1 - f_A)/b_B. \quad (3)$$

⁹⁾ P. Langevin, Ann. Chim. Physique 5, 245 (1905); H. R. Hassé, Philos. Mag. 1, 139 (1926).

Dieser lineare Zusammenhang zwischen reziproker Beweglichkeit und der Konzentration eines Mischungsanteils ist das Blanesche Gesetz¹⁰⁾.

Unabhängig von den Eigenschaften der einzelnen Mischungskomponenten ist es stets erfüllt, solange durch alle Mischungsverhältnisse hindurch die Ionen, deren Beweglichkeit gemessen wird, unverändert bleiben.

b) Veränderliche Ionen

In polaren Gasen wie etwa Wasserdampf bilden sich um die Ionen Molekülkomplexe, deren Bindungsgesetze mit den thermischen Stoßgesetzen vergleichbar sind. Die Anlagerung erfolgt daher nur locker. Die Moleküle werden bei jedem Stoß statistisch dem Komplex zugefügt oder abgetrennt¹¹⁻¹³⁾.

Betrachten wir den Driftweg eines solchen instabilen Komplexes, der aus einem Ion und einem Molekül bestehen möge, im elektrischen Feld, so läuft das Ion in Feldrichtung immer abwechselnd eine gewisse Strecke x frei mit der Beweglichkeit b_A und eine weitere Strecke x' als Komplex mit der Beweglichkeit b'_A . Bezeichnen wir die Summe aller Wege x , die das Ion unangestört zurücklegt, mit X , und entsprechend die Summe aller x' mit X' , so ergibt sich nach Overhauser¹⁴⁾ für die mittlere Beweglichkeit \bar{b}_A des instabilen Komplexes

$$1/\bar{b}_A = 1/(1 + X'/X) b_A + 1/(1 + X/X') b'_A. \quad (4)$$

Man kann diese Beweglichkeit nur dann messen, wenn mindestens eine der beiden mittleren Strecken x oder x' klein ist gegenüber der Gesamtaufstrecke $X + X'$.

Der Ausdruck X/X' wird von Overhauser mit p bezeichnet. p ist proportional dem Verhältnis w_A/W_A der beiden auf den Einzelstoß bezogenen Wahrscheinlichkeiten für Dissoziation (w_A) und Anlagerung (W_A). $1/(1 + p)$ wird als Komplexbildungsfaktor g eingeführt. $g = 1$ bedeutet einen praktisch stabilen Komplex.

Bei Gasgemischen, in denen die Moleküle einer Mischungskomponente instabile Komplexe bilden, versagt das Blanesche Gesetz. Statt dessen kann eine Gleichung von Overhauser angewandt werden, die eine Weiterführung des Ansatzes von (4) darstellt.

Sie lautet in einer etwas kürzeren Schreibweise

$$\frac{1}{\bar{b}_{AB}} = \frac{1 + \frac{1}{P(1 + l f_B/f_A)}}{b'_{AB} + \frac{b'_{AB}}{P(1 + l f_B/f_A)}}. \quad (5)$$

Dabei sind f_A und f_B die relativen Anteile der Gase A und B , und b_{AB} und b'_{AB} wären die jeweiligen Beweglichkeiten von stabilen Ionen bzw. stabilen Komplexen in der Mischung. Der Faktor P ist eine Funktion des Overhauserschen Komplexbildungsfaktors g . Der Dissoziationsparameter l

¹⁰⁾ A. Blanc, Bull. Soc. Franc. phys. **1908**, 156; J. phys. Chem. **7**, 825 (1908).

¹¹⁾ R. J. Munson, A. M. Tyndall u. K. Hoselitz, Proc. Roy. Soc. London A **172**, 28 (1939).

¹²⁾ R. J. Munson u. A. M. Tyndall, Proc. Roy. Soc. London A **177**, 187 (1941).

¹³⁾ S. Bloom u. H. Margenau, Physic. Rev. **85**, 670 (1952).

¹⁴⁾ A. W. Overhauser, Physic. Rev. **76**, 250 (1949).

berücksichtigt die Wahrscheinlichkeit w_B für eine Dissoziation des gebildeten Komplexes bei einem Stoß mit Molekülen des inaktiven Gases B . Bei sehr kleiner Anlagerungswahrscheinlichkeit W_A entsprechend $g = 0$ oder bei sehr großer Dissoziationswahrscheinlichkeit entsprechend einem sehr großen l findet keine Komplexbildung statt. Die Overhausersche Gleichung geht dann in das Blanesche Gesetz über.

Die Overhausergleichung in der vorliegenden Form gibt einige Abweichungen der Ionenbeweglichkeiten von Blaneschen Gesetz, wie sie an Alkaliionen in Edelgasen beobachtet worden sind¹²⁾, befriedigend wieder.

V. Meßergebnisse

A. Messungen in Edelgasen und im Argon-Sauerstoff-Gemisch

1. Umladung der Primärionen mit Verunreinigungen

Der Anlaß zu einer eingehenden Untersuchung darüber, wie die gemessenen Ionenbeweglichkeiten im Gas von etwa stattfindenden Umladungen der Primärionen beeinflußt werden, war durch die überraschenden Resultate einiger Probemessungen mit der gerade fertiggestellten Meßapparatur gegeben.

Lediglich als Test sollten die Beweglichkeitswerte von Argonionen in Argon bestimmt werden. Dabei zeigte sich in einer Gasprobe, die unter der Bezeichnung „spektralrein“ im Handel ist, eine gegenüber den bekannten Argonwerten viel zu hohe Beweglichkeit.

Eine plausible Erklärung dafür bot sich in der Annahme, daß die ursprünglichen Argonionen mit den wenigen im Gas noch vorhandenen Sauerstoffmolekülen umgeladen hatten und so die gemessene Beweglichkeit den Sauerstoffionen zugeschrieben werden mußte. Die weiteren Messungen zeigten, daß diese Annahme richtig war.

Zunächst aber war die Frage vordringlich geworden, wie rein Gase eigentlich sein müssen, damit man mit Sicherheit noch die Beweglichkeit der primär erzeugten Gasionen messen kann. Loeb¹⁵⁾ sagt darüber: „... if known ions are to be studied, the measurements must be made within less than a millisecond on reasonably pure gases to prevent change.“ Unter „reasonably pure“ versteht er Reinheitsgrade von etwa $1:10^{-6}$. Aber an keiner Stelle finden sich nähere Angaben über das, was beim Übergang zu höheren Fremdgaskonzentrationen nun eigentlich erwartet werden muß. Es wäre ja zunächst ebenso denkbar, daß sich die Beweglichkeit dabei allmählich verändert, wie daß es ein Konzentrationsgebiet gibt, in dem man zwei verschiedene Beweglichkeiten gleichzeitig erhält.

Vor allen weiteren Versuchen schien es daher notwendig, einmal wirklich auszurechnen, wie das Ergebnis einer Beweglichkeitsmessung in Argon aussehen wird, wenn die Argonionen auf ihrem Weg durch das Gas mit Sauerstoffmolekülen umladen.

Die Berechnung zeigt: Argon- und Sauerstoffimpuls schließen sich gegenseitig aus. Bei abnehmender Sauerstoffkonzentration im Meßgas verschmiert der Impuls, den die Sauerstoffionen verursachen, immer mehr und ist bereits völlig verflacht, wenn bei kleineren Sauerstoffanteilen als einigen 10^{-6} der Impuls der Argonionen zu erscheinen beginnt.

¹⁴⁾ L. B. Loeb, Basic processes of gaseous electronics, Berkeley u. Los Angeles 1955.

Man findet demnach keine Sauerstoffkonzentration, bei welcher die Beweglichkeiten von Sauerstoff- und von Argonionen gleichzeitig meßbar wären. Dagegen gibt es einen ganzen Konzentrationsbereich, in dem weder der eine noch der andere Impuls in nachweisbarer Form auftritt und wo daher überhaupt keine Beweglichkeit bestimmt werden kann.

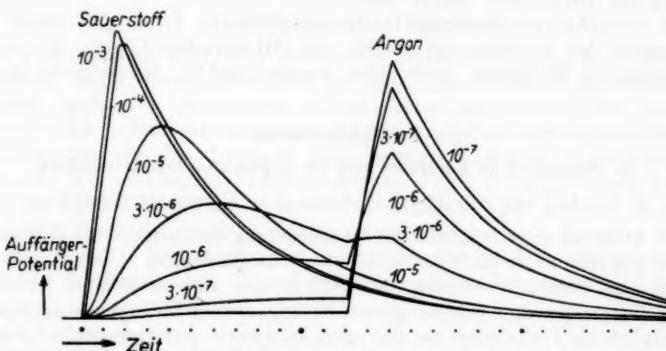


Abb. 3. Berechnete Form der Meßimpulse in Argon mit kleinen Sauerstoffzusätzen. Eine Zeitmarke entspricht $10 \mu\text{sec}$. Argondruck 187 Torr. Als Parameter ist die Sauerstoffkonzentration aufgetragen. Bei einer Konzentration von $1:10^{-5}$ beträgt die mittlere freie Weglänge der Argonionen zwischen Stößen mit Sauerstoff etwa $\frac{1}{4}$ der Gesamtlaufstrecke

Dieser Weder-Noch-Bereich ist gekennzeichnet durch die Bedingung $2 < w_U \cdot z t < 6$, wenn die betreffenden Ionen ihre Meßstrecke in der Zeit t zurücklegen und z -mal in der Sekunde mit Fremdmolekülen stoßen, auf die sie dabei mit der Wahrscheinlichkeit w_U umladen.

Der Ausdruck $w_U \cdot z t$ ist für $p_S \ll p_A$ proportional zu $p_S p_A x_0 / E$. (p_S = Sauerstoffpartialdruck, p_A = Argonpartialdruck.) Um also im Meßgas die Argonionenbeweglichkeit zu erhalten, kann man statt mit einer möglich niedrigen Sauerstoffkonzentration auch mit einem kleineren Meßdruck p_A , mit einer kürzeren Ionenlaufstrecke x_0 oder mit einer größeren Feldstärke E arbeiten. Umgekehrt bedeutet das: wenn man in einem Gas die Beweglichkeit der Primärionen messen will, so muß man die gewünschten niederen E/p -Werte bei der Messung mit einem um so höheren Aufwand bei der Gasreinigung erkaufen.

Die durchgeführten Messungen ergeben in spektralreinem Argon (Reinheitsgrad $1:10^{-4}$) eine größere Beweglichkeit als in Calcium-gereinigtem Argon (Reinheitsgrad $> 1:10^{-7}$). In Calcium-gereinigtem Argon mit Sauerstoffzusätzen in der Größenordnung von $1:10^{-3}$ wird genau die gleiche Ionenbeweglichkeit gemessen wie in spektralreinem Argon. Dieser Beweglichkeitswert wird daher Sauerstoffionen zugeschrieben.

Bei zwischenliegenden Sauerstoffkonzentrationen verschwinden, wie nach den vorausgehenden Überlegungen zu erwarten war, die Auffängerimpulse so sehr, daß keine Beweglichkeit mehr gemessen werden kann. Auf dem Bildschirm des Oszilloskopraphen läßt sich zeigen, daß bei Sauerstoffanteilen von einigen 10^{-6} Sauerstoff- wie Argonimpuls im Rauschpegel verschwinden.

Äl
Arbeit
werde
erreic
dem
in das
stofffi
Sauer

2. A
(E
Tabe

In
wegli
bisher
molek
atom
Ionen
Fünf
signa

D
Argon
Messu
diese

In
b = ?
schni
Atom

In
reinig
wegli
A⁺-I
Ne₂ a
lichk

E
ließ
Zahl
von

1
1
1

Ähnliche Untersuchungen wie in Argon-Sauerstoff sind im Lauf dieser Arbeit auch an der Kombination Sauerstoff-Quecksilberdampf durchgeführt worden. Dabei hat sich gezeigt, daß die höchste mit der verwendeten Apparatur erreichbare Quecksilberdampfkonzentration von einigen 10^{-5} (entsprechend dem Quecksilberdampfdruck bei Zimmertemperatur) in diesem Falle gerade in das Zwischengebiet fällt, in dem sich weder der Quecksilber- noch der Sauerstoffimpuls ausbildet, so daß eine Messung der Quecksilberbeweglichkeit in Sauerstoff nicht möglich war.

2. Absolutwerte der in Edelgasen gemessenen Beweglichkeiten

(Eine Zusammenfassung aller dieser Werte wird in der ausführlichen Tabelle in Abschnitt VI gegeben.)

a) Argon

In reinem Argon wurde bei E/p zwischen 2 und 3 Volt/cm Torr eine Beweglichkeit von $b = 1,84 \pm 0,04 \text{ cm}^2/\text{Voltsec}$ gemessen. Wie Vergleiche mit bisher bekannten Werten eindeutig erweisen, muß diese Beweglichkeit Argonmolekülien vom Typ A_2^+ zugeschrieben werden. Ein Impuls, der Argonatomionen entsprechen würde, konnte nicht beobachtet werden; wenn solche Ionen also vorhanden wären, betrug ihre Anzahl sicher weniger als ein Fünftel der Molekülien, entsprechend einem Molekülionensignal-Rauschsignal-Verhältnis von 5:1.

Darüber hinaus ließ sich weder in extrem reinem noch in verunreinigtem Argon ein Beweglichkeitswert ermitteln, der eindeutig den Biondischen Messungen¹⁶⁾ von $b = 2,65$ entsprochen hätte. Eine eingehende Diskussion dieses Meßwertes findet sich bei Biondi¹⁷⁾ selbst und bei Schütt¹⁸⁾.

In Argon mit Sauerstoffzusätzen bis zu 30% betrug die Beweglichkeit $b = 2,45 \text{ cm}^2/\text{Voltsec}$. Daraus errechnet sich nach Langevin ein Stoßquerschnitt $\text{A}-\text{O}_2^+$ von $86 \cdot 10^{-11} \text{ cm}^2$. Das entspricht einer Radiensumme Ion-Atom von 5,2 Ångströmeinheiten.

b) Neon

In einem zufällig gerade verfügbaren und ebenfalls im Calciumofen gereinigten Gemisch von Neon mit einem Promille Argon ergab sich eine Beweglichkeit von $b = 5,85 \pm 0,1 \text{ cm}^2/\text{Voltsec}$. Dieser Wert ist möglicherweise A^+ -Ionen zuzuordnen. Er stimmt, wie infolge der gleichen Masse von A und Ne_2 auch erklärbar erscheint, in etwa mit den Literaturwerten für die Beweglichkeit von Ne_2^+ -Ionen in Neon überein.

Ein Zusatz von einem Promille Sauerstoff zu dem beschriebenen Gemisch ließ die Beweglichkeit auf $b = 7,3 \pm 0,15 \text{ cm}^2/\text{Voltsec}$ ansteigen. Aus dieser Zahl folgt für den Stoßquerschnitt O_2^+-Ne der ungewöhnlich niedrige Wert von $18 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$ oder die Radiensumme von 2,4 Ångström.

¹⁶⁾ L. M. Chanin u. M. A. Biondi, Physic. Rev. **94**, 910 (1954).

¹⁷⁾ L. M. Chanin u. M. A. Biondi, Physic. Rev. **106**, 473 (1957).

¹⁸⁾ K. Schütt, Z. Physik **143**, 489 (1955).

B. Messungen in Stickstoff und Sauerstoff und in Mischungen beider Gase

In diesem Abschnitt werden Messungen beschrieben, die als Vorbereitung für die folgende Untersuchung der Wasserdampf-Komplexbildung in Stickstoff und Sauerstoff durchgeführt worden sind. Sie geben aber zugleich ein Beispiel dafür, wie sich aus dem Verlauf der Beweglichkeit mit dem Mischungsverhältnis Aussagen gewinnen lassen über die Art der Ionen in den einzelnen Gasen, aus denen sich die Mischung zusammensetzt.

1. Die Ionenbeweglichkeit in reinem Stickstoff

Bisher gemessene Absolutwerte sind in der Tabelle in Abschn. VI zusammengestellt. Abb. 4 zeigt den Gang der Beweglichkeit mit E/p . Aus dem Vorhandensein eines Maximums der Ionenbeweglichkeit bei etwa 40 Volt/cm Torr schließt Varney¹⁹⁾, daß in Stickstoff je nach dem betrachteten E/p -Bereich verschiedene Ionen vorhanden sind: bei hohem E/p N_2^+ -Ionen, bei niedrigem E/p N_4^+ -Ionen. Neuere Messungen von Geballe und Burch²⁰⁾ bei sehr niedrigen Temperaturen bestätigen diese Annahme.

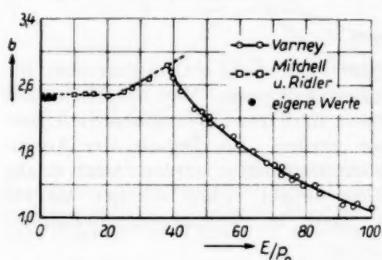


Abb. 4. Ionenbeweglichkeiten in Stickstoff in Abhängigkeit von E/p_0 . Gestrichelte Kurve: Werte von Ridler (1934²¹). Ausgezogene Kurve: Werte von Varney (1953). Volle Kreise: Eigene Werte

Eigene Messungen ergeben für E/p zwischen 2 und 4 Volt/cm Torr einen Beweglichkeitswert von $b = 2,43 \pm 0,06 \text{ cm}^2/\text{Voltsec}$. Aus der verkürzten Langevin-Gleichung erhält man für die Beweglichkeit von N_4^+ -Ionen $b = 2,42$.

Eigene Messungen ergeben für E/p zwischen 2 und 4 Volt/cm Torr einen Beweglichkeitswert von $b = 2,43 \pm 0,06 \text{ cm}^2/\text{Voltsec}$. Aus der verkürzten Langevin-Gleichung erhält man für die Beweglichkeit von N_4^+ -Ionen $b = 2,42$.

2. Die Ionenbeweglichkeit in reinem Sauerstoff

Die Messungen von Varney erstrecken sich auf den Bereich $E/p > 40$. Die Extrapolation der Beweglichkeit nach verschwindenden Feldstärken ist hier naturgemäß sehr unsicher. Varney selbst hält jeden Wert zwischen 2,15 und 2,35 für gleich wahrscheinlich. In Tabellen, etwa bei Loeb, findet man meist die Mitte dieses Bereichs, 2,25, als Sauerstoffbeweglichkeit angegeben.

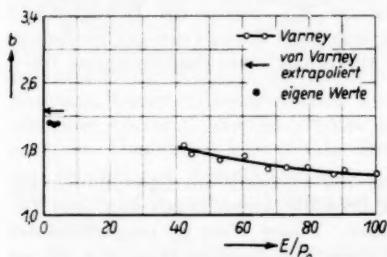


Abb. 5. Ionenbeweglichkeiten in Sauerstoff in Abhängigkeit von E/p_0 . Ausgezogene Kurve: Werte von Varney. Volle Kreise: Eigene Werte. Pfeil: Von Varney extrapoliertes Wert

Eigene Messungen ergeben für E/p zwischen 2 und 4 Volt/cm Torr in reinem Sauerstoff einen Beweglichkeitswert von $b = 2,12 \pm 0,05$.

¹⁹⁾ R. N. Varney, Physic. Rev. **89**, 708 (1953).

²⁰⁾ R. Geballe u. D. S. Burch, Physic. Rev. **106**, 183 (1957).

²¹⁾ J. H. Mitchell u. K. E. W. Ridler, Proc. Roy. Soc. London A **146**, 911 (1934).

Fraglich ist, welchen Ionen diese Beweglichkeit zugeschrieben werden muß. Die Varneyschen Werte beziehen sich zweifellos auf O_2^+ -Ionen, aber es spricht zunächst nichts dagegen, daß seine Kurve, könnte man sie zu niedrigeren Feldstärken hin verfolgen, ein ähnliches Maximum durchlaufen würde wie bei Stickstoff. Auch die massenspektroskopischen Untersuchungen von Luhr²²⁾, der in reinem Sauerstoff außer O_2^+ keine weiteren Ionen findet, schließen das Vorhandensein von höhermolekularen Ionenkomplexen bei sehr niedrigen Feldstärken unter den vorliegenden Verhältnissen nicht mit Sicherheit aus, da Luhrs Ergebnisse in um mehrere Größenordnungen kleineren Druckbereichen gewonnen wurden und der Vorgang der Komplexentstehung sehr wohl druckabhängig sein kann.

In der Messung der Beweglichkeiten im Stickstoff-Sauerstoffgemisch wurde nun ein Weg gefunden, auf dem sich nachweisen läßt, daß die Ionen in Sauerstoff tatsächlich durchweg O_2^+ -Ionen sind.

3. Die Ionenbeweglichkeit in Stickstoff-Sauerstoff-Mischungen

Abb. 6 zeigt: Die Ionenbeweglichkeit gehorcht im N_2-O_2 -Gemisch streng dem Blaneschen Gesetz. Demnach ist durch alle Mischungsverhältnisse hindurch nur eine einzige Ionenart vorhanden. Es ist sehr unwahrscheinlich, daß es sich dabei um einen ionisierten Stickstoff-Sauerstoffkomplex handelt, da Zusammensetzung und Bildungswahrscheinlichkeit eines solchen Komplexes kaum völlig unabhängig vom Konzentrationsverhältnis der beiden Gase sein würden. Am nächstliegenden ist daher die Annahme reiner Sauerstoffionen, da Sauerstoff ein niedrigeres Ionisationspotential hat als Stickstoff.

Daraus erklärt sich auch die plötzliche Änderung der Beweglichkeit beim Zusatz einiger Promille Sauerstoff zu reinem Stickstoff: die primären Stickstoffionen haben auf Sauerstoff umgeladen.

Im Gegensatz dazu ändert sich beim Zusatz kleiner Stickstoffmengen zu reinem Sauerstoff die Beweglichkeit überhaupt nicht. Das Ion muß also in allen Mischungen das gleiche sein wie in reinem Sauerstoff, auch dort, wo der Sauerstoffpartialdruck bereits kleiner ist als der Druck bei den Messungen von Luhr. Selbst bei Sauerstoffbeimengungen, die so niedrig sind, daß der Sauerstoffionenimpuls gerade noch nachgewiesen werden kann, liegt die Beweglichkeit immer noch auf der Blaneschen Geraden, und bei diesen Konzentrationen kann eine Bildung höhermolekulärer als O_2^+ -Ionen einfach wegen der geringen Stoßzahlen mit O_2 -Molekülen kaum mehr erwartet werden.

Folglich müssen die Ionen in reinem Sauerstoff auch bei Drucken von mehreren hundert Torr ebenfalls als O_2^+ -Ionen angesehen werden.

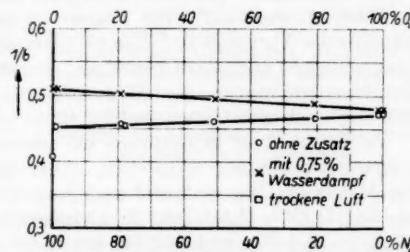


Abb. 6. Reziproker Wert der Beweglichkeit im N_2-O_2 -Gemisch. Untere Gerade: ohne Zusatz. Obere Gerade: Mit 0,75% Wasserdampf

²²⁾ O. Luhr, Physic. Rev. 44, 459 (1933).

Der Wert der Beweglichkeit von Sauerstoffionen in Stickstoff beträgt $2,22 \text{ cm}^2/\text{Voltsec.}$

In Abb. 6 ist noch ein Meßpunkt eingetragen, der die Beweglichkeit in mit flüssigem Stickstoff sorgfältig getrockneter Luft wiedergibt. In der Literatur finden sich für trockene Luft eine ganze Anzahl von verschiedenen Werten, die von $1,1^{23})$ bis $2,1^{24})$ reichen, und deren Abweichung voneinander offenbar von den mehr oder weniger wirksamen Trocknungsverfahren herührt. Im vorliegenden Falle, wo neben Wasserdampf natürlich auch Quecksilberdampf, Kohlendioxyd und etwa vorhandene organische Dämpfe mit ausgeföhren worden sind, stimmt die Luftbeweglichkeit völlig mit der Beweglichkeit im entsprechenden Stickstoff-Sauerstoff-Gemisch überein. Die früher oft zitierten „Luftionen“ sind unter diesen Bedingungen sicher O_2^+ -Ionen.

C. Wasserdampfzusätze zu Stickstoff und Sauerstoff

Die folgenden Messungen befassen sich mit dem Einfluß von Wasserdampfzusätzen auf die Beweglichkeit der positiven Ionen in Stickstoff und Sauerstoff. Dabei sind vor allem drei Punkte zu klären:

1. Handelt es sich um Ionen des Trägergases oder um H_2O^+ -Ionen?
2. Wie groß ist der entstehende Wassermolekülkomplex? und
3. Wie ändert sich der Komplex mit steigendem Wasserdampfgehalt?

Eine Antwort auf diese Fragen ist nicht nur ganz allgemein zum Verständnis der Vorgänge der Komplexentstehung selbst von Bedeutung, sondern kann vielleicht auch dazu beitragen, manche Erscheinungen und Probleme der Tröpfchenbildung in der Wilsonschen Nebelkammer, an deren völliger Klärung noch gearbeitet wird²⁵⁾, einer Lösung näherzubringen.

Zu Punkt 1. ist es natürlich am nächstliegenden, sich die entsprechenden Ionisationspotentiale anzusehen. Aber damit kommt man nicht sehr weit. Die Werte für Wasserdampf und Sauerstoff stimmen nämlich in etwa überein (für $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{O}^+$ liegt E_i zwischen $12,4^{26})$ und $12,7^{27})$ eV, für $\text{O}_2^+ \rightarrow \text{O}_2$ ist $E_i = 12,5$ eV), und für Stickstoff ist der benötigte Wert ($\text{N}_4^+ \rightarrow 2 \text{N}_2 + ?$ eV) nicht bekannt.

Auch hier hilft wieder eine Betrachtung der Beweglichkeiten in verschiedenen Mischungen. Diesmal nehmen wir dazu Stickstoff-Sauerstoff-Gemische mit jeweils gleichen Wasserdampfzusätzen. Die zugehörigen Meßwerte sind in Abb. 6 eingetragen.

Auch in diesem Fall ist die Änderung der reziproken Beweglichkeit dem Mischungsverhältnis von N_2 und O_2 streng proportional. Aber bei der Anwesenheit von Wasserdampf ändert jetzt weder der Zusatz kleiner Sauerstoffmengen zu reinem Stickstoff noch der Zusatz kleiner Stickstoffmengen zu reinem Sauerstoff die Beweglichkeit in irgendwie erkennbarer Weise.

Dieses Verhalten deutet darauf hin, daß in allen Mischungen einschließlich der Reingase die gleiche Ionenart läuft, und das läßt sich einfach und zwanglos nur durch eine Umladung der Trägergasionen, und zwar beider Gase, auf Wassermoleküle erklären. Diese Beobachtung stimmt auch wiederum sehr

²³⁾ J. Zeleny, Physic. Rev. **36**, 35 (1930).

²⁴⁾ H. Schilling, Ann. Physik **83**, 23 (1927).

²⁵⁾ M. Pollermann, Z. Elektrochem. **56**, 313 (1952).

²⁶⁾ R. Henning, Ann. Physik **13**, 599 (1932).

²⁷⁾ H. D. Smyth u. D. W. Mueller, Physic. Rev. **43**, 116 (1933).

gut mit den entsprechenden massenspektroskopischen Untersuchungen Luhrs überein, der bei N_2 und O_2 schon in der nichtausgeheizten Meßanordnung einen sehr hohen Anteil von Wasserionen erhält.

Wir werden daher in folgenden die Ionen in Stickstoff und Sauerstoff bei kleinen Wasserdampfzusätzen als H_2O^+ -Ionen ansehen.

Bei den nächsten Messungen wird in reinem Stickstoff und in reinem Sauerstoff der Wasserdampfgehalt variiert. Abb. 7 zeigt den Verlauf der Beweglichkeit in solchen Mischungen. Das Ergebnis entspricht nicht dem Blaneschen Gesetz. Extrapolation der Beweglichkeit auf sehr geringe Wasserdampfkonzentrationen ergibt im Stickstoff eine kleinere, in Sauerstoff eine geringfügig größere Beweglichkeit als jeweils in den Reingasen. Diese extrapolierten Werte werden H_2O^+ -Ionen zugeschrieben. Mit zunehmendem Wasserdampfgehalt lagern an die H_2O^+ -Ionen ein oder mehrere weitere Wassermoleküle an, die aber als Außenmoleküle nur locker gebunden sind. Durch sie werden die beobachteten Abweichungen von der Blaneschen Regel verursacht.

Die Beweglichkeit eines solchen Komplexes müßte nun in ihrer Abhängigkeit von der Wasserdampfkonzentration durch die Mischungsgleichung von Overhauser beschrieben werden können. Die bestmögliche Annäherung an die Meßwerte, die sich mit dieser Gleichung durch geeignete Wahl der Parameter g und l erzielen läßt, ist in Abb. 7 als gestrichelte Kurve eingetragen. Man sieht unmittelbar, daß unter den Voraussetzungen, wie sie Overhauser seiner Theorie zugrunde gelegt hat, zwar eine qualitative, keineswegs aber eine auch quantitativ befriedigende Übereinstimmung mit den Messungen erreicht werden kann.

Overhauser betrachtet die Anlagerungswahrscheinlichkeit W_A beim Stoß zwischen Ion und Molekül als unabhängig von der Gasdichte N_A des komplexbildenden Mischungsanteils A . Er bemerkt dazu selbst, daß diese Voraussetzung nicht in allen Fällen zuzutreffen brauche. Das hätte eine nichtlineare Abhängigkeit der Beweglichkeit von der Gasdichte zur Folge, die zwar noch nirgends beobachtet worden ist, nach der aber auch noch niemand systematisch gesucht hat.

Es lag also sehr nahe, bei der Ableitung der Overhausergleichung einmal versuchsweise eine einfache Proportionalität zwischen Anlagerungswahrscheinlichkeit und Gasdichte anzusetzen.

Das ergibt

$$\frac{1}{b_{AB}} = \frac{\frac{1}{b_A} + \frac{1}{b_B}}{\frac{1}{b_A} + \frac{1}{b_B} + \frac{1}{P(1 + f_B/f_A)(1 + l f_B/f_A)}} \quad (6)$$

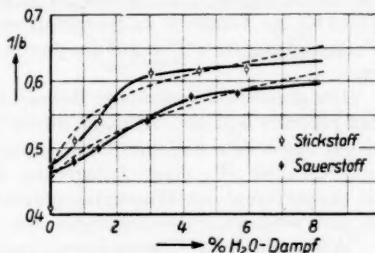


Abb. 7. Beweglichkeiten in Stickstoff (oben) und in Sauerstoff (unten) mit steigendem Wasserdampfgehalt. Gestrichelte Kurven: Beste Anpassung der ursprünglichen Overhauser-Gleichung an die Meßwerte. Ausgezogene Kurven: Beste Anpassung der abgeänderten Overhauser-Gleichung an die Meßwerte

Dabei ist P wieder eine Funktion des Overhauserschen Anlagerungsparameters g .

Das Ergebnis der Beweglichkeitsberechnung mit der so abgeänderten Gleichung sind die ausgezogenen Kurven der Abb. 7. Die neue Formel enthält — das muß betont werden — gegenüber der ursprünglichen Overhausergleichung keinen zusätzlichen freien Parameter. Auch sind die Größen g und l , durch deren geeignete Wahl die Kurven den vorliegenden Meßwerten angepaßt werden, in Stickstoff und Sauerstoff keineswegs voneinander unabhängig. Vernünftigerweise wird man annehmen müssen, daß der Anlagerungsparameter g in beiden Gasen der gleiche bleibt, während der Dissoziationsparameter l in Sauerstoff entsprechend der größeren Masse der O_2 -Moleküle im Vergleich zu Stickstoff ein wenig größer sein sollte. Genau diese Voraussetzungen treffen auf das g und l der hier wiedergegebenen beiden Kurven zu.

Der gemessene Verlauf der Beweglichkeitsänderung mit steigendem Wasserdampfgehalt läßt sich demnach durch die abgeänderte Overhausergleichung so gut darstellen, daß damit die Annahme gerechtfertigt erscheint, die Wahrscheinlichkeit W_A einer Anlagerung des Moleküls beim Stoß mit dem Ion sei proportional der Wasserdampfdichte. Zum direkten Beweis dafür bedarf es noch weiterer Untersuchungen, vor allem in reinem Wasserdampf.

Alle bisherigen Überlegungen kommen mit der Vorstellung aus, daß sich an die Wasserionen lediglich ein weiteres Wassermolekül anlagent. Auch die Stoßquerschnitte, die sich aus den gemessenen Beweglichkeiten mit Hilfe der Langevingleichung für einen solchen Komplex bestimmen lassen, sprechen für diese Vorstellung. Sie liegen zum Beispiel in Stickstoff um etwa 20–30% über dem Wert, der O_2^+ -Ionen in Stickstoff zukommt.

Wenn man für den Wasserkomplex größere Massen ansetzt, werden die Stoßquerschnitte schnell unwahrscheinlich klein, ja sogar kleiner als die für das einfache H_2O^+ -Ion berechneten.

Vorläufig wird man daher in Stickstoff und Sauerstoff einen instabilen Komplex aus einem Wasserion und einem Wassermolekül annehmen dürfen.

VI. Zusammenfassung

a) Es wird eine Anordnung beschrieben, mit der die Beweglichkeit positiver Ionen in Zeitraum von etwa $5 \cdot 10^{-4}$ Sekunden nach ihrer Entstehung bis herab zu $E/p = 0,2$ Volt/cm Torr mit einem Fehler von $\pm 2,5\%$ bestimmt werden kann, und die allen vakuumtechnischen Bedingungen für das Arbeiten mit extrem reinen Gasen gerecht wird.

b) Enthält das Meßgas Zusätze eines Fremdgases mit niedrigerem Ionisationspotential, so laden die Primärionen mit den Molekülen des Fremdgases um. Die Auswirkung dieses Vorgangs auf die gemessenen Beweglichkeiten wird untersucht. Es kann gezeigt werden, daß es bei sehr niedrigen Konzentrationen des Fremdgases einen bestimmten Bereich gibt, in dem keine definierte Beweglichkeit mehr meßbar erscheint. Dieser Konzentrationsbereich ist gekennzeichnet durch die Bedingung $2 < w_U \cdot z \cdot t < 6$ (w_U = Umladungswahrscheinlichkeit, z = sekundliche Stoßzahl der Ionen mit Fremdgasmolekülen, t = Laufzeit der Ionen.) Bei Ionenlaufzeiten von $5 \cdot 10^{-4}$ sec entspricht das einer Konzentration von einigen Tausendstel Promille.

Will man beispielsweise in mit Sauerstoff verunreinigtem Argon die Beweglichkeit von Argoniumen messen, so muß bei Meßdrucken von einigen 100 Torr der Sauerstoffpartialdruck unter 10^{-4} Torr bleiben. Die Beweglichkeit von Sauerstoffionen in Argon erhält man dagegen erst dann, wenn der Sauerstoffzusatz einige 10^{-3} Torr übersteigt.

c) Die Ionenbeweglichkeiten in reinem Stickstoff und in reinem Sauerstoff werden bei E/p -Werten von etwa 2 Volt/cm Torr gemessen. Die Ergebnisse ergänzen die in diesen Gasen bisher bekannten Beweglichkeitswerte,

Tabelle der Ionenbeweglichkeiten

Gas	Ion	Beweglichkeit bei 0° und 760 Torr						Stoßquerschnitt		
		gemessen			berechnet					
		a	b	c	d	e	g	h	i	k
Ne	Ne^+			4,0	(4,4)		4,86		65	21
	Ne_2^+		6,3	6,5	(5,85)			6,0		36
	A^+	5,85						6,0		
	O_2^+	7,3						6,25		18
A	A^+			1,60	(1,63)	1,51	1,67		134	42
	A_2^+	1,84	(1,93)	2,65	(1,90)	1,81		2,1		99
	O_2^+	2,45				2,46		2,57		86
Kr	Kr^+			(1,01)	(0,90)	(0,92)	1,01		157	59
	Kr_2^+			1,21	(1,15)		1,18			
Xe	Xe^+		0,77	(0,58)	(0,62)		0,77		192	67
	Xe_2^+			(0,79)	(0,72)	f	0,74			
O_2	O_2^+	2,12			(2,25)	2,2	2,69	2,75	79	114
	H_2O^+	2,15							138	32
	$(\text{H}_2\text{O})_2^+$	1,64?							155	
	N_2^+						2,17	2,80	123	38,5
N_2	N_4^+	2,43	(2,49)			2,38		2,42		74
	O_2^+	2,22						2,71		108
	H_2O^+	2,13								144
	$(\text{H}_2\text{O})_2^+$	1,58?								164

Gemessene Beweglichkeitswerte:

- a) Eigene Meßwerte
- b) Bristol-Gruppe
- c) Chanin und Biondi
- d) Hornbeck und Varney
- e) Schütt²²⁾
- f) Huber²³⁾

Eingeklammerte Werte sind aus Messungen bei $E/p > 10$ auf $E/p = 0$ extrapoliert!

Nach Langevin berechnete Beweglichkeitswerte:

- g) vollständige Langevingleichung mit Verwendung des Stoßquerschnitts
- h) verkürzte Langevingleichung.

Stoßquerschnitte (in 10^{-16} cm^2):

- i) berechnet nach Wannier²⁴⁾ aus der Driftgeschwindigkeit bei hohen Feldstärken,
- k) berechnet nach Langevin aus den gemessenen Beweglichkeiten,
- l) gaskinetische Werte.

²²⁾ E. Huber, Physic. Rev. 97, 267 (1955).

die fast alle durch Extrapolation aus Messungen in den Gebieten hoher Feldstärke gewonnen worden waren.

Die Untersuchung der Beweglichkeiten in Stickstoff-Sauerstoff-Gemischen bestätigt die Vermutung, daß in reinem Sauerstoff im Gegensatz zu Stickstoff keine höhermolekularen Ionenkomplexe gebildet werden, sondern nur einfache O_2^{\pm} -Molekülien.

Auch in gewöhnlicher Luft, die mit flüssigem Stickstoff sorgfältig getrocknet worden war, konnten keine anderen als O_2^{\pm} -Ionen beobachtet werden.

d) Wasserdampfzusätze zu Stickstoff und Sauerstoff und zu Gemischen dieser beiden Gase ergaben Beweglichkeiten, aus denen sich schließen läßt, daß bei der Anwesenheit von Wasserdampf die Primärionen zunächst auf Wassermoleküle umladen, und daß weiter die so entstandenen Wasserionen mit steigendem Wasserdampfgehalt ein und wahrscheinlich nur ein neutrales Wassermolekül locker anlagern.

Unter der Annahme, daß für das Molekül die Anlagerungswahrscheinlichkeit bei einem Stoß mit dem Ion proportional ist der Wasserdampfdichte, läßt sich eine abgeänderte Form der Overhausergleichung angeben, durch welche der gemessene Verlauf der Beweglichkeitsabnahme mit steigendem Wasserdampfzusatz in beiden Gasen beschrieben werden kann.

Ich bedauere zutiefst, meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Chr. Gerthsen, hier nicht mehr danken zu können. Er hat mir die Durchführung dieser Arbeit an seinem Institut ermöglicht und ihr stets sein förderndes Interesse entgegengebracht. Herrn Dr. M. Pollermann danke ich für die Anregung des Themas und für wertvolle Diskussionen sowie Herrn Prof. Dr. E. Huster für kritische Durchsicht der Arbeit.

Karlsruhe, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Bei der Redaktion eingegangen am 25. Oktober 1957.

I
berei
von
Sau
ladu
werd
Dure

I
Entl
einer
ange
gefü
ringt

I
näh
gibt

V
rend
zurü
Wec
Nach
Vers
das

über
Phys
(1935
Sci. 1
214, 6
37, 1
59, 9
eins.

A

Untersuchungen über den Existenzbereich der elektrodenlosen Ringentladung

Von H.-J. Strauß

Mit 15 Abbildungen

Inhaltsübersicht

Im Frequenzbereich zwischen 4 MHz und 8 MHz wird der Existenzbereich der elektrodenlosen Ringentladung in Abhängigkeit vom Druck und von der erregenden Frequenz für die Edelgase und Quecksilber, Stickstoff, Sauerstoff, Brom sowie Jod angegeben. Die Felder, die die Zündung der Entladung hervorrufen und die, die den Umschlag in die Ringentladung bewirken, werden in Abhängigkeit von der Spulenspannung bestimmt. Die für die Durchführung der Versuche benutzte Anlage wird beschrieben.

1. Einleitung

Die elektrodenlose Ringentladung (im folgenden ELR genannt) stellt ein Entladungsphänomen dar, das auftritt, wenn im elektromagnetischen Feld einer von hochfrequentem Strom durchflossenen Spule ein Entladungsgefäß angeordnet wird, das mit dem zu untersuchenden Gas unter passendem Druck gefüllt ist; es bildet sich dann bei hinreichend starker Erregung eine sehr helle ringförmige Entladung aus, die normal zur Spulenachse brennt.

Die ELR wurde zuerst von Hittorf beschrieben und später von Thomson näher untersucht. Eine ausführliche Zusammenstellung der Literatur bis 1928 gibt Mierdel in seinem Handbuchartikel über die Glimmentladung¹⁾.

Vor allem war das Problem der Zündung der Entladung umstritten. Während zum Teil die Zündung der Entladung auf das elektrische Feld der Spule zurückgeführt wurde, wurde zum anderen in der durch das magnetische Wechselfeld der Spule induzierten Spannung die Ursache für die ELR gesehen. Nach den bis heute bekannt gewordenen Tatsachen und auf Grund der eigenen Versuche geht die Zündung einer ELR folgendermaßen vor sich: Überschreitet das elektrische Feld der Spule im Entladungsgefäß einen durch Gasart,

¹⁾ W. Wien-F. Harms, Handb. d. Experimentalphys. Bd. 13/3. Neuere Arbeiten über die Ringentladung: I. M. Braun, Physic. Rev. **36**, 1195 (1930); F. Cabannes, Ann. Physique **10**, 1026 (1955); F. H. Crawford and C. G. Smith, Physic. Rev. **48**, 477 (1935); G. Dejardin, J. Physique Radium **9**, 142 (1938); F. Esclangon, C. R. Acad. Sci. Paris **192**, 1211 (1931); G. Goudet, P. Herreng u. G. Nief, C. R. Acad. Sci. Paris **214**, 62 (1942); K. A. McKinnon, Philos. Mag. **8**, 605 (1929); Ch. T. Knipp, Physic. Rev. **37**, 1020 (1931); J. Kunz, Philos. Mag. **13**, 964 (1932); Ch. G. Smith, Physic. Rev. **59**, 997 (1941); J. T. Tykociner und J. Kunz, Physic. Rev. **37**, 100 (1931); J. Tykocinsky-Tykociner, Philos. Mag. (7) **13**, 953 (1932).

Fülldruck und Frequenz des angelegten Feldes bestimmten Wert (Zündfeldstärke), zündet die Gasstrecke. Es brennt nun (bei passendem Fülldruck) eine lichtschwache Entladung, die den Schwingkreis kaum beeinflußt und die hier „Vorentladung“ genannt wird. Diese Vorentladung ist identisch mit der in der Literatur beschriebenen Entladung „elektrostatischen Typs“. Bei steigender Erregung wird, infolge der damit verbundenen Steigerung der magnetischen Durchflutung (und damit der induzierten elektrischen Feldstärke), bei einem auch wieder für Gas, Druck und Frequenz charakterischen Wert (Umschlagsfeldstärke) ein Umschlag erreicht. Nach dem Umschlag hat die Entladung den gleichen Charakter wie die in der Literatur beschriebene Ringentladung.

Dieser Umschlag ist, wie später gezeigt werden wird, nur in einem bestimmten Druckintervall zu beobachten. Außerhalb dieses Bereiches baut sich die Ringentladung in sehr kurzer Zeit auf, ohne daß die Vorentladung bei der Zündung stationär erhalten werden kann.

2. Elektromagnetisches Spulenfeld

Da das Feld im (hier kugelförmigen) Entladungsgefäß keineswegs homogen ist, wird das örtliche Maximum des zeitlichen Spitzenwertes des Feldes als Zünd- bzw. Umschlagsfeldstärke angesehen. Um nun Aussagen über die Zündfeldstärke machen zu können, muß das Feld im Innern der Spule bestimmt und der Wert des örtlichen Maximums des Feldes im Entladungsgefäß in Abhängigkeit von der Geometrie und der Spulenspannung ermittelt werden. Das elektrische Feld der Spule ist ganz allgemein gegeben durch

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}, \quad (1)$$

wobei \mathfrak{E} eine Funktion der Zeit ist:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Dabei bedeuten φ das skalare Potential und \mathfrak{A} das Vektorpotential der Spule. Bei der Berechnung wird die Spule durch Kreisringe ersetzt; außerdem werden Ladungsverteilung und Strom auf die an der Spule liegende Hochfrequenzspannung zurückgeführt. Aus dem so berechneten Potential folgt nach Gl. (1) sofort die Feldstärke in Abhängigkeit von der Geometrie und der an der Spule liegenden Hochfrequenzspannung. Weiter zeigt die Berechnung, daß der örtliche Maximalwert der Feldstärke am Äquator der Kugel zu erwarten ist, wenn die Kugel so angeordnet wird, daß die Spulenachse durch die Pole der Kugel geht und der Mittelpunkt der Spule mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Der zeitliche Spitzenwert dieses örtlichen Maximalwertes der Feldstärke im Augenblick der Zündung wird als Zündfeldstärke angesehen.

Der erste Term der Gl. (1) liefert in bekannter Weise ein wirbelfreies Feld \mathfrak{E}_s , das durch die Potentialverteilung im Innenraum der Spule bestimmt ist. Der zweite Term liefert ein quellenfreies Feld \mathfrak{E}_i , das seine Entstehung der Induktion verdankt. Die zeitlichen Spitzenwerte sollen mit $\mathfrak{E}_{0,s}$ und $\mathfrak{E}_{0,i}$ bezeichnet werden.

Die in der Kugel herrschende maximale Feldstärke E setzt sich geometrisch aus $E_{0,s}$ und $E_{0,i}$ zusammen (wobei mit E die zeitlichen und örtlichen Maximalwerte in der Kugel bezeichnet werden). Da beide Anteile senkrecht aufeinander stehen und miteinander in Phase sind, wird

$$E_0 = \sqrt{E_{0,s}^2 + E_{0,i}^2}. \quad (3)$$

Für die benutzten geometrischen Verhältnisse ergeben sich folgende Werte für E_0 und $E_{0,i}$ in Abhängigkeit von der effektiven Spulenspannung:

$$E_0 = 0,15 U_{\text{eff}}; E_{0,i} = 0,007 U_{\text{eff}}. \quad (4a, b)$$

Diese Relationen gelten streng genommen nur im Vakuum, mit guter Näherung aber auch bei noch nicht gezündeter Entladung. Dieser Fall ist für die Bestimmung der Zündfeldstärke immer erfüllt. Für eine Berechnung dieser Feldstärke bestehen demnach keine Bedenken.

Da nun der Umschlag der Vorentladung in die Ringentladung auf die magnetische Durchflutung zurückgeführt wird, haben wir die induzierte Feldstärke als Maß für den Umschlag genommen. Diese Feldstärke wird im Gegensatz zu der Gesamtfeldstärke durch die Ladungsverteilung der Vorentladung nicht verfälscht. Nun geht aber in die induzierte Feldstärke die Permeabilität des Plasmas ein, über die nichts Näheres bekannt ist. Wir haben diesen Wert gleich 1 gesetzt. Es wurde dehalb in die Feldstärke-Druck-Diagramme eine zweite Skala eingetragen, die die induzierte Feldstärke allein angibt und die für den Umschlag der Vorentladung in die ELR gilt.

3. Versuchsanlage

Die Versuchsanlage umfaßt den Vakuumteil, den Hochfrequenzgenerator, der die zum Brennen der ELR notwendige Energie liefert und die notwendigen Meßeinrichtungen. Das Zusammenwirken der einzelnen Teile ist aus dem Blockbild der Versuchsanlage (Abb. 1) zu entnehmen.

a) Vakuumanlage

Der Vakuumteil der Anlage besteht aus der üblichen Anordnung: eine kräftige Vorpumpe (VP) (Typ Z 3 der Firma Geyer)

pumpt ein Ballastvolumen von etwa 3 Liter bis auf 10^{-3} Torr. Dieses Ballastvolumen dient als Vorpumpe für eine Quecksilberdampfpumpe mit einer

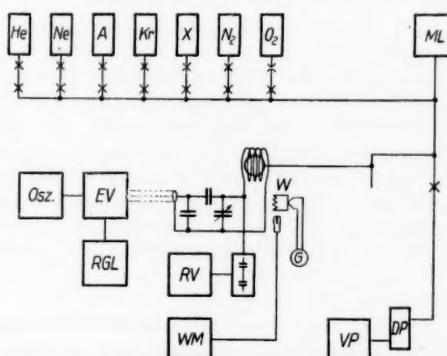


Abb. 1. Blockbild der Versuchsanlage. He, Ne, A, Kr, X, N₂, O₂: Gasvorrat; ML: McLeod; DP: Diffusionspumpe; VP: Vorpumpe; RV: Röhrenvoltmeter; W: Stromwandler; Osz: Oszillatormodul; EV: Sende-Endverstärker; RGL: Regelgleichrichter; WM: Wellenmesser

Dampfstrahl- und zwei Diffusionsstufen (DP). Von der Diffusionsspumpe führt eine Leitung weiter zur Kühlfalle, in der Restdämpfe mit flüssiger Luft ausgefroren werden. Vor der Kühlfalle mündet in diese Leitung eine Zweigleitung, die die Gasvorräte, die sich in den üblichen Glasampullen befinden, und das Mc Leodsche Manometer (ML) mit der Hauptleitung verbindet. Hinter der Kühlfalle führt die Hauptleitung weiter zur Kugel, die sich in der Spule des Arbeitskreises befindet.

b) Hochfrequenzgenerator

Wird eine ELR in einem Schwingkreis erzeugt, der unmittelbar der frequenzbestimmende Kreis des Generators ist oder mit diesem fest gekoppelt ist, sind starke Rückwirkungen der Entladung auf die Frequenz des Generators zu beobachten. Um diese Frequenzverwerfung zu vermeiden, haben wir den Generator zweistufig aufgebaut.

Als Steuerstufe (Osz) wurde eine Pentode (LS 50) in EKO-Schaltung gewählt. Die Eigenart dieser Schaltung gestattet es, die sonst zur Erzielung von Frequenzkonstanz notwendige Trennstufe zwischen Oszillator und Endverstärker wegzulassen.

Der Endverstärker (EV) selbst ist mit zwei Sendeendpentoden (AS 1000) bestückt. Diese beiden Röhren arbeiten im Gegenakt-B-Betrieb. Die Hochfrequenzenergie wird induktiv aus dem Anodenkreis der Endstufe ausgekoppelt. Über ein koaxiales 60-Ohm-Kabel wird diese Energie weiter zum Arbeitskreis geleitet. Die Anodenspannung der Endstufe wird von einem Gleichrichter (RGL) geliefert und ist von 0 bis 3000 V regelbar. Am 60-Ohm-Ausgang des Generators wurden bei voller Aussteuerung und bei einer Anodenspannung von etwa 2000 V 1300 W Hochfrequenzleistung gemessen.

Der Arbeitskreis besteht aus einem kapazitiven Anpassungsglied, einem variablen Kondensator zur Abstimmung und der Arbeitsspule. Die zum Überstreichen des Frequenzbereiches notwendige Kapazitätsänderung wurde durch 3 wahlweise einschaltbare Festkondensatoren und einem Drehkondensator erreicht. Die Spannungsfestigkeit des Drehkondensators begrenzte die maximale Spannung an der Arbeitsspule auf etwa 2500 V_{eff}. Die Arbeitsspule bestand aus 4 Windungen von 8 mm starkem Kupferrohr. Die Spule wurde zum Abführen der Kupferverluste durch Wasser gekühlt. Der Durchmesser der Spule beträgt 10,6 cm, ihre Länge 3,8 cm. Die Kreisgüte wurde mit $Q = 113$ bestimmt.

c) Meßeinrichtung

Neben dem Druck des Füllgases sind die Hochfrequenzspannung an der Arbeitsspule, der durch diese fließende Strom und die Frequenz des Generators zu messen.

Fülldruck: Bei den permanenten Gasen wurde der Druck mit dem Mc Leod bestimmt. Das von uns benutzte Vakuummeter hatte zwei Meßbereiche. Mit dem ersten wurde das Druckintervall von 20 bis 10^{-1} Torr, mit dem zweiten das von $6 \cdot 10^{-1}$ bis $5 \cdot 10^{-4}$ Torr erfaßt. Gemessen wurde bei diesen Gasen der Kaltfülldruck.

Dampf
gewün
nen E
Temp
einem
bei J
Diese
Subst
errech

Bei
zum
Trock
von a
werde
führen
weiter
Brom
über
schliff
dehnun
gleich
des 1
Von d
führt
einen
TS 3
Der 1
in Gl
tisch
Volum
der F
Eispun
Öffner
ladung
öffnet,
und n
wurde
Zünds
verhäl

Nat
das in
flüssig
merkli
das Au
konde

Spa
die Me

Bei Quecksilber und Jod wurde in üblicher Weise die Abhängigkeit des Dampfdruckes von der Temperatur eines Bodenkörpers zum Einstellen des gewünschten Druckes ausgenutzt. Beide Substanzen wurden in abgeschmolzenen Entladungsgefäßen untersucht, die sich in einem elektrisch auf konstanter Temperatur gehaltenen Ofen befanden. Der Bodenkörper befand sich in einem Ansatzstutzen, der in ein heizbares Ölbad (bzw. Trichloräthylenbad bei J_2) tauchte. Die Temperatur des Bades bestimmte den Dampfdruck. Diese Temperatur wurde thermoelektrisch gemessen. Der Dampfdruck beider Substanzen wurde nach in der Literatur angegebenen Dampfdruckformeln errechnet.

Bei den Untersuchungen in Brom wurde ein volumimetrisches Verfahren zum Einstellen des Druckes gewählt. Das Entladungsgefäß ist über einen Trockenschliff TS 1 (Abb. 2) mit der Pumpe verbunden. Dieser Schliff kann von außen magnetisch geöffnet werden. In die zur Kugel führende Leitung mündet eine weitere ein, die einmal zum Bromvorrat und zum anderen über einen weiteren Trockenschliff TS 2 zu einem Ausdehnungsvolumen von etwa der gleichen Größe wie das Volumen des Entladungsgefäßes führt. Von diesem Ausdehnungsvolumen führt eine weitere Leitung über einen dritten Trockenschliff TS 3 zu einer Ausfriertasche. Der Bromvorrat befand sich in Glasampullen, die magnetisch (mit Hilfe überglaster Eisenkerne) geöffnet werden konnten. Das Volumen dieser Ampullen wurde durch Auswiegen bestimmt. Ebenso wurde der Fülldruck genau eingestellt durch den Dampfdruck des Broms beim Eispunkt. Die Größe der Ampulle war so abgestimmt, daß sich nach Öffnen der Ampulle und bei geschlossenen Trockenschliffen in dem Entladungsgefäß ein Druck von etwa 10 Torr einstellte. Die Ampulle wurde geöffnet, nachdem die gesamte Anlage auf Hochvakuum gebracht worden war und nachdem der Trockenschliff TS 1 geschlossen wurde. Der genaue Druck wurde aus den Volumenverhältnissen bestimmt. Nach der Ermittlung der Zündspannung wurde der Schliff TS 2 geöffnet. Auf Grund der Volumenverhältnisse stellte sich ein neuer Druck ein, der wiederum berechnet wurde.

Nach Schließen des Schliffes TS 2 wurde der Schliff TS 3 geöffnet und das in das Ausdehnungsvolumen gestromte Brom in der Ausfriertasche mit flüssiger Luft kondensiert. Während der Zeitdauer des Versuchs drang keine merkliche Menge Brom durch den Schliff TS 1, ebenso konnte immer das in das Ausdehnungsvolumen gestromte Brom restlos kondensiert werden. Nicht kondensierbare Restgase wurden nicht beobachtet.

Spannung: Ein Röhrenvoltmeter (RV) gestattet über Spannungsteiler die Messung der an der Arbeitsspule liegenden Hochfrequenzspannung. Be-

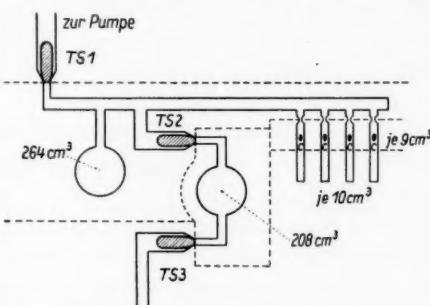


Abb. 2. Anordnung zum Einstellen des Druckes in Brom

nutzt wurden die RFT-Röhrenvoltmeter Typ 114a und Typ 187; dazu die kapazitiven Spannungsteiler Typ 163 bzw. 4025. Der erste Teiler hat ein Teilverhältnis von 1:1000. Der zweite wurde vom Teilverhältnis 1:1000 auf 1:100 umgebaut. Der Fehler dieser beiden Anordnungen (Eigenfehler der Röhrenvoltmeter und Teilerfehler) war $\pm 5\%$ bzw. $\pm 6\%$.

Strom: Zur Messung des Stromes standen verschiedene Stromwandler (W) zur Verfügung. Zwei Durchsteckstromwandler der Firma EFEM für $60 \text{ A}_{\text{eff}}$ und für $25 \text{ A}_{\text{eff}}$, ein Durchsteckstromwandler von Hartmann u. Braun für 6 A_{eff} und ein selbstgefertigter Wandler für $20 \text{ A}_{\text{eff}}$ gestatteten die Messung des Stromes mit einer Genauigkeit von $\pm 3\%$ des Skalenendwertes.

Frequenz: Mit einem Präzisionswellenmesser (RFT Typ 212) (WM) wird die Frequenz des Hochfrequenzgenerators während der Messung laufend überwacht. Mit Hilfe dieses Gerätes konnte der Generator mit einem Fehler von weniger als $\pm 1\%$ auf die gewünschte Arbeitsfrequenz abgestimmt werden, während die Konstanz der Frequenz im Verlauf der Meßreihe mit einer Unsicherheit von weniger als $\pm 0,1\%$ überwacht werden konnte.

4. Durchführung der Messung

a) Darstellung und Reinheit der Gase

Die zur Untersuchung gelangenden Edelgase wurden in den üblichen Glasampullen bezogen. Während Neon und Xenon „reinst“ zur Verfügung standen, wurden Helium „spektralrein“ und Argon sowie Krypton „rein“ benutzt.

Stickstoff wurde durch thermische Zersetzung von Natriumazid gewonnen. Vor der eigentlichen Zersetzung wurde das Natriumazid im Hochvakuum bei 240°C ausgeheizt und schließlich auf 290°C gebracht. Die bei dieser Temperatur eintretende Zersetzung wurde so eingeregelt, daß eine Umsetzungs geschwindigkeit von etwa 10 Torr pro Sekunde nicht überschritten wurde. Glaswattefilter und Kühl fallen (die mit flüssiger Luft beschickt wurde) hielten staubförmige und kondensierbare Verunreinigungen zurück.

Sauerstoff wurde durch thermische Zersetzung von Kaliumpermanganat gewonnen. Die umkristallisierte und gut getrocknete Substanz wurde im Hochvakuum bei 120°C gut ausgeheizt. Nach einigen Stunden wurde die Zersetzung mit einem Bunsenbrenner eingeleitet. Mit dem zuerst freiwerdenden Gas wurde das Vorratsgefäß gespült. Danach wurden die Hähne geschlossen und die Umsetzung fortgesetzt. Glaswattefilter und Kühl fallen sorgten auch hier für Freiheit von Staub und kondensierbaren Gasen.

Quecksilberdampf wurde aus metallischem Quecksilber gewonnen, daß im Hochvakuum zweimal destilliert wurde. Die zweite Destillation wurde bei etwa $80-100^\circ \text{C}$ vorgenommen.

Bromdampf wurde aus elementarem Brom gewonnen, das flüssig von VEB Schering, Berlin, bezogen wurde. Die Reinheit entsprach der Angabe „pro analysi“. Dieses Brom wurde im Vakuum über gebrannten Kalk (zur Entfernung etwa anwesender Bromwasserstoffe) und über Phosphorpentoxid (zur Trocknung) geleitet. Beim Abfüllen in die Ampullen wurde der Bodenkörper auf der Temperatur des Eispunktes gehalten.

Jod wurde als Jod resbl. DAB 6 in Substanz bezogen. Dieses Jod wurde im Vakuum nochmals sublimiert und in den Ansatzstutzen des Entladungsgefäßes eingefüllt.

b) Formieren der Entladungsgefäße

Bei orientierenden Vorversuchen hatte es sich immer wieder gezeigt, daß reproduzierbare Werte für die Zündung der Entladung nur bei größter Sauberkeit der Kugel erhalten werden konnten. Es zeigte sich, daß — selbst nach kräftigem Ausheizen — die Kugeln, die fast bei allen Untersuchungen aus Fischer-Prima-Glas bestanden, noch nicht die notwendige Reinheit besaßen. Es wurde deshalb versucht, mit Hilfe kräftiger Ringentladungen die Kugeln sauber zu brennen. Während nach dem Ausheizen das von der Entladung emittierte Licht innerhalb weniger Minuten weißlich wurde, gelang es, nach (mitunter stundenlangem) Brennen und Spülen der Kugeln, diese so zu säubern, daß das Spektrum für den ganzen Zeitraum der Messung sauber blieb. Als Spülgas mußte das jeweils zu untersuchende Gas genommen werden. Die Zeittdauer des Formierens war abhängig von dem zur Untersuchung gelangenden Gas. (Helium hatte die längste, Sauerstoff die kürzeste Formierdauer.)

c) Abgrenzung von Vorentladung und Ringentladung

Die Entladungsform, die wir mit der ELR identifizierten, hatte nicht immer den typischen Ringcharakter. In Vorversuchen in Quecksilberdampf hatten wir festgestellt, daß sich dieser Ring nur bei hinreichend hohen Drücken scharf ausbildet. Bei niedrigen Drücken erfüllt die Entladung diffus die Kugel. Außerdem ist die Schärfe des Ringes auch von der von der Entladung aufgenommenen Energie abhängig. So ist z. B. bei den niedrigen Feldstärken, wie sie bei der Bestimmung der Umschlagsfeldstärke auftreten, der Ring auch bei höheren Drücken unscharf.

Wird nun nach dem Zünden der Vorentladung die Erregung gesteigert, wird die Vorentladung heller. Eine wesentliche Rückwirkung auf den Arbeitskreis ist aber im allgemeinen nicht zu beobachten, weder in bezug auf die Bedämpfung noch in bezug auf die Verstimmung des Kreises. Überschreitet die Feldstärke in der Kugel die Umschlagsfeldstärke, erfolgt ein Umschlag in eine andere Entladungsform, die im Gegensatz zur Vorentladung den Arbeitskreis wesentlich bedämpft und etwas verstimmt. Außerdem steigt die Helligkeit der Entladung um Größenordnungen. Diese Entladungsform zeigt nun bei genügend hohen Drücken (besonders ausgeprägt bei den beiden schweren Edelgasen Krypton und Xenon und bei Quecksilber) die typische Ringform (Abb. 3). Der Übergang von der diffusen Entladungsform unmittelbar nach dem Umschlag in die Form mit deutlich erkennbarer Ringbildung erfolgt kontinuierlich. Es erscheint daher gerechtfertigt, den Begriff „elektrodenlose Ringentladung“ auch auf die diffuse Form nach dem Um-

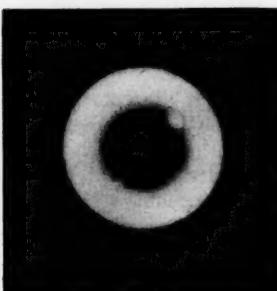


Abb. 3. Ringentladung in Quecksilber (6 Torr bei 225° C; 4,32 MHz)

schlag anwenden zu können, zumal sich bei den schweren Edelgasen Krypton und Xenon eine Variation der Intensität einzelner Spektrallinien längs des

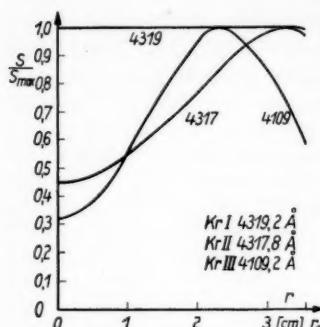


Abb. 4. Verlauf der relativen Schwärzung längs des Radius der Kugel bei einer Ringentladung in Krypton Kr I 4319,5 12,76 eV; Kr II 4109,2 20,8 eV; Kr II 4317,8 21,4 eV

den verfahren); dann wurde die Anodenspannung der Senderendstufe eingeschaltet und hochgeregelt. Die Regelung erfolgte über einen Dreiphasen-Regeltransformator auf der Primärseite des Hochspannungsgleichrichters (RG). Das Hochregeln wurde so langsam vorgenommen, daß die Anzeige des Röhrenvoltmeters mit der Regelung Schritt halten konnte. Die Zündung selbst wurde visuell durch das Aufleuchten des Gases festgestellt. In diesem Augenblick wurde die Spannung an der Arbeitsspule durch Ablesen des Röhrenvoltmeters bestimmt. Danach wurde die Anodenspannung weiter hochgeregelt bis es zum Umschlag in die Ringentladung kam. Der höchste Wert der Hochfrequenzspannung unmittelbar vor dem Umschlag gibt die zum Umschlag gehörige Spannung. Das wurde mehrmals wiederholt. Aus den Mittelwerten der Zünd- und der Umschlagsspannung wurden nach den Gl. (4a) und (4b) die Zünd- bzw. Umschlagsfeldstärken berechnet. Zwischendurch wurden die Frequenz des Generators und der Nullpunkt des Röhrenvoltmeters (beide waren natürlich genügend lange vor Beginn der Meßreihe eingeschaltet worden) überwacht. Im Anschluß an die Messungen wurde der Druck nochmals bestimmt. Im allgemeinen wichen der Enddruck nicht vom Kaltfülldruck ab. Die durch Variation des Druckes entstandenen Meßreihen wurden für das zu untersuchende Gas und die vorgegebene Frequenz mehrmals wiederholt und dabei auf ihre Reproduzierbarkeit überprüft.

Während die Werte für die Zündspannung eine Streuung von $\pm 6\%$ aufwiesen, war die Streuung der Werte für die Umschlagsspannung geringer, sie betrug $\pm 2,5\%$. Unter Berücksichtigung der Instrumentenfehler resultiert ein mittlerer Fehler für die Zündspannung von $\pm 8\%$ und für die Umschlagsspannung von $\pm 7\%$. Die Unsicherheit der aus diesen Spannungen errechneten Feldstärken liegt bei $\pm 10\%$.

Durchmessers auch bei schwacher Erregung nachweisen lassen konnte (Abb. 4). Die so eingeführte Ringentladung entzieht dem Arbeitskreis sehr viel Energie, so daß der Kreis stark bedämpft wird. Diese starke Bedämpfung äußert sich im Zusammenbrechen der Spannung an der Arbeitsspule; dieses Zusammenbrechen der Spannung wurde als Kriterium für den eingetretenen Umschlag in die ELR genommen.

d) Durchführung der Messung und Reproduzierbarkeit

Die Messung der Zündfeldstärke wurde folgendermaßen vorgenommen: Die Kugeln wurden nach gründlichem Formieren mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt. Der Kaltfülldruck wurde mit dem McLeod gemessen (bei Hg, J_2 und Br_2 wurde entsprechend den dort angewandten Meßmethoden

und
schie
gebe
liege
Frec
Dab
Gas
vers
Max
(ebe
E, i
entla
entla

mun
schie

300
200
100
F₀
V_{ss}
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
1100
1200
1300
1400
1500
1600
1700
1800
1900
2000
2100
2200
2300
2400
2500
2600
2700
2800
2900
3000
3100
3200
3300
3400
3500
3600
3700
3800
3900
4000
4100
4200
4300
4400
4500
4600
4700
4800
4900
5000
5100
5200
5300
5400
5500
5600
5700
5800
5900
6000
6100
6200
6300
6400
6500
6600
6700
6800
6900
7000
7100
7200
7300
7400
7500
7600
7700
7800
7900
8000
8100
8200
8300
8400
8500
8600
8700
8800
8900
9000
9100
9200
9300
9400
9500
9600
9700
9800
9900
10000

klein
lich.

Die nach dem geschilderten Verfahren ermittelten Werte für die Zünd- und die Umschlagsfeldstärke werden (für die einzelnen Gase und die verschiedenen Frequenzen) in Diagrammen zusammengestellt. Diese Diagramme geben die Abhängigkeit beider Feldstärken vom Druck an. Für jedes Gas liegen vier Einzeldiagramme übereinander, die für die vier verschiedenen Frequenzen, bei denen die Messungen durchgeführt wurden, Gültigkeit haben. Dabei gilt für diese vier Einzeldiagramme die gleiche Abszisse, auf der der Gasdruck aufgetragen ist. Die Ordinate ist mit zwei verschiedenen Skalen versehen; auf der linken Seite des Diagrammes ist der (örtliche und zeitliche) Maximalwert der Feldstärke innerhalb der Kugel E_0 aufgetragen, rechts der (ebenfalls örtliche und zeitliche) Maximalwert der induzierten Feldstärke $E_{0,i}$. Die linke Skala gilt für die Zündung, wobei es gleich ist, ob eine Vorentladung oder eine ELR zündet. Die rechte gilt für den Umschlag der Vorentladung in die ELR.

5. Ergebnisse der Messungen

Im Druckbereich unter 10 Torr wird für alle untersuchten Gase ein Minimum der Zündfeldstärke der Vorentladung gefunden. Dieses Minimum verschiebt sich mit steigender Frequenz langsam nach tieferen Drücken und

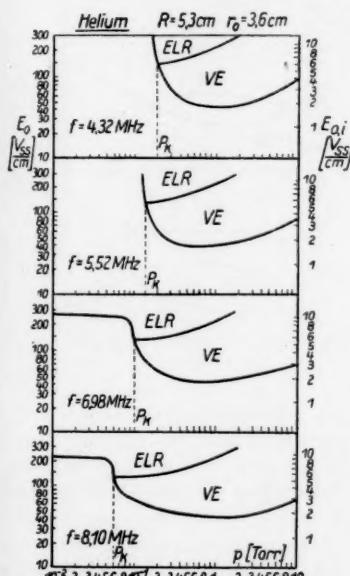


Abb. 5. Zünd- und Umschlagskurve in Helium

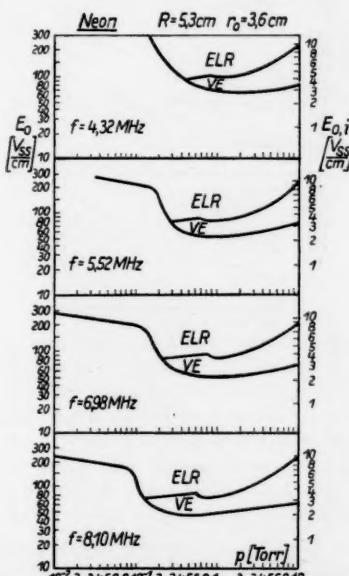


Abb. 6. Zünd- und Umschlagskurve in Neon

kleineren Feldstärkewerten. Gleichzeitig verbreitert sich das Minimum wesentlich. Von einem bestimmten Druck ab, den wir mit p_k (der Druck p_k wurde

nur in die Heliumdiagramme eingezeichnet; in den anderen Diagrammen liegt er sinngemäß bezeichnen, existiert nach tiefen Drucken hin die Vorentladung nicht mehr.

Die Umschlagsfeldstärke der Vorentladung in die ELR fällt bei Helium, von hohen Drücken herkommend, monoton bis zum Druck p_k ab. Unterhalb dieses Druckes erfolgt ein steiler Anstieg der Zündfeldstärke, wobei in diesem Bereich nach der Zündnung sofort die Ringentladung brennt. An diesen steilen Anstieg schließt sich bei den Frequenzen 6,96 und 8,10 MHz ein langsam steigender Ast in der Zündcharakteristik an. Mit wachsender Frequenz ver-

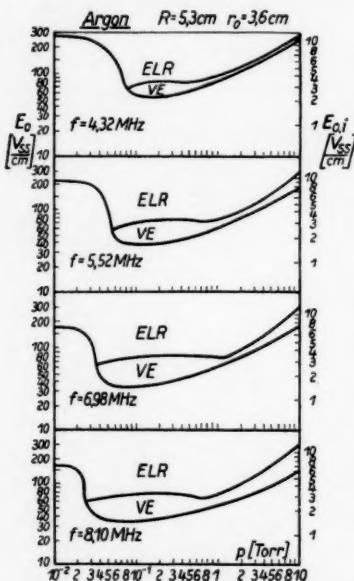


Abb. 7. Zünd- und Umschlagskurve in Argon

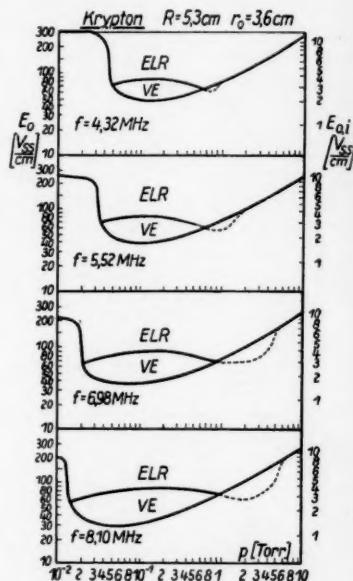


Abb. 8. Zünd- und Umschlagskurve in Krypton

schiebt sich dieser langsame Anstieg nach niedrigeren Feldstärkewerten. Daß bei den beiden niedrigen Frequenzen dieser langsame Anstieg nicht beobachtet werden kann, liegt daran, daß die Feldstärken, bei denen dieser langsame Anstieg einsetzen würde, wegen der begrenzten Durchschlagsfestigkeit des Drehkondensators nicht erreicht werden können. (Abb. 5).

Bei Neon existiert die Vorentladung ebenfalls noch bis zum höchsten gemessenen Druck. Nach dem Durchlaufen des Zündfeldstärkeminimums erfolgt wieder der Anstieg, der mit wachsender Frequenz immer steiler wird. An diesen Anstieg schließt sich wieder ein langsam steigender Teil an, der ebenfalls mit steigender Frequenz zu niedrigeren Feldstärkewerten übergeht.

Die Umschlagsfeldstärke sinkt von hohen Drücken herkommend ab, durchläuft, im Gegensatz zu dem Verlauf bei Helium, ein erstes Minimum,

steigt danach etwas an, um schließlich wieder bis zum Druck p_k abzufallen. (Abb. 6).

Bei Argon sind die gleichen Verhältnisse wie bei Neon zu beobachten. Lediglich ist das Minimum in der Umschlagsfeldstärke deutlicher ausgeprägt und bei hohen Drücken liegt die Umschlagsfeldstärke nur noch wenig über der Zündfeldstärke. Die Differenz zwischen Zündfeldstärke und Umschlagsfeldstärke steigt mit wachsender Frequenz. (Abb. 7).

Bei den drei bisher beschriebenen leichten Edelgasen waren weder eine typische Ringbildung noch farbliche oder strukturelle Besonderheiten an

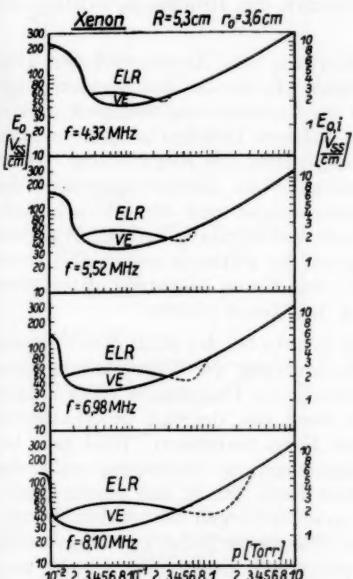


Abb. 9. Zünd- und Umschlagskurve in Xenon

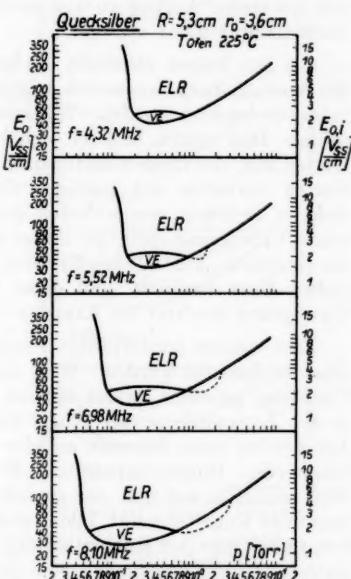


Abb. 10. Zünd- und Umschlagskurve in Quecksilber

der Entladung zu beobachten. Das Bild der ELR war das einer leuchtenden Scheibe ohne Struktur. Diese Form wird trotz des ringlosen diffusen Bildes mit zur ELR gerechnet, weil das elektrische Verhalten der Entladung (die starke Bedämpfung des Arbeitskreises) dem der ELR voll entspricht. Diese Auffassung wurde, wie oben gezeigt wurde, durch spektroskopische Beobachtungen an ebenfalls diffusen Entladungen in Krypton erhärtet.

Im Gegensatz dazu zeigte sich zumindest bei höheren Drücken bei Krypton und Xenon, sowie auch bei Quecksilber ein deutlicher Ring nach dem Umschlag in die ELR. Außerdem zündete oberhalb eines bestimmten Grenzdruckes sofort die Ringentladung. (Abb. 8, 9, 10.)

In einem kleineren Druckintervall unterhalb dieses oberen Grenzdruckes zündet beim Überschreiten der Zündfeldstärke eine kräftige Vorentladung, die auch in die Pumpleitung übergreift. Diese Entladung bedämpft den Schwingkreis, und die Spannung an der Arbeitsspule sinkt wegen des hohen Quellwiderstandes ab. Wird nun die Spannung an der Arbeitsspule erneut hochgeregt, erfolgt der Umschlag in die Ringentladung bei einer niedrigeren Spannung als die, die zur Zündung der Entladung gehört. Die Kurven für Zündung und Umschlag überschneiden sich, und die Umschlagskurve (gestrichelt) liegt in diesem Bereich unter der für die Zündung. Im anschließenden Druckbereich sind die gleichen Verhältnisse wie bei den anderen Edelgasen. Die Zündfeldstärke der Vorentladung durchläuft ein Minimum, daran schließt sich ein steiler Anstieg an und nach Durchlaufen des Druckes p_k existiert die Vorentladung nicht mehr.

Bei den beiden schweren Edelgasen Krypton und Xenon wich das Bild der Vorentladung wesentlich von den Bildern ab, die bei den leichten Edelgasen beobachtet wurden. Während dort die Vorentladung ein strukturloses ruhiges Bild zeigte, bildeten sich hier bei höheren Drücken perl schnurartige Ketten aus, die ihren Ansatzpunkt am Pumpstutzen der Kugel hatten. Diese Ketten rotierten mit mäßiger Geschwindigkeit im Entladungsgefäß. Bei tieferen Drücken verschwanden diese Erscheinungen und der schwach leuchtende Untergrund bleibt als diffus leuchtende Vorentladung zurück. Während die einzelnen „Perlen“ bei Krypton eine grünliche Färbung zeigen und einen gelben Kern besitzen, sind diese Gebilde bei Xenon leuchtend grün. Der Untergrund leuchtet bei Krypton fahlblau, bei Xenon violett.

Eine weitere merkwürdige Erscheinung konnte bei der ELR dieser beiden Gase beobachtet werden. Wird die Perl schnurform der Vorentladung zum Umschlag gebracht, bildet sich im Augenblick des Umschlages ein schmaler in der Aquatorebene der Kugel liegender Ring aus, der sich innerhalb von Bruchteilen einer Sekunde auf die normale Form verbreitert. Wird nun bei brennender Ringentladung die Hochfrequenzleistung verringert, reißt der Ring einseitig auf und der zurückbleibende Rest, der in den oberen Halbraum der Kugel wandert, bildet elektrisch gesehen (wegen der starken Dämpfung) noch eine Art Ringentladung. Dieser Plasmarest bildet nun längs seiner unteren Begrenzungsfläche eine (in Krypton) gelb leuchtende Schicht aus, die sich gut von dem grünlichen Licht des Plasmas abhebt. Diese Schicht buchtet sich nach oben ein und zerplatzt schließlich. Dabei fliegen gelb leuchtende Plasmakügelchen durch den oberen Halbraum der Kugel zur Glaswand. Dieser Vorgang dauert etwa 0,5 s und wiederholt sich fast periodisch. Wird der gleiche Versuch mit Xenon wiederholt, sind abgesehen von kleinen farblichen Unterschieden die gleichen Verhältnisse zu beobachten.

Im Gegensatz dazu konnte in Quecksilber nie eine Struktur der Vorentladung noch irgendwelche Besonderheiten an der Ringentladung beobachtet werden.

Auffällig ist, daß sich beim Übergang von Neon über die schwereren Edelgase nach Quecksilber in der Umschlagskurve ein Minimum ausbildet, daß von Neon an zu beobachten ist. Dieses Minimum vergrößert sich schließlich so weit, daß die Umschlagskurve unter die Zündkurve absinkt und somit nach dem Zünden sofort die ELR stationär existiert.

Diag
Vore
ELR
gege
versi
300
200
100
50
10
1
Abb.
V
das
der
aus.
dem
und
ler
eine
Bei
die
Ring
Leu

Bei den Molekülgasen erinnern die Zünd- bzw. Umschlagsfeldstärke-Druck-Diagramme an die von Helium. Oberhalb des Grenzdruckes p_k zündet eine Vorentladung, die bei Steigerung der Spannung an der Arbeitsspule in die ELR umschlägt; unterhalb dieses Druckes zündet die ELR sofort.

Stickstoff (Abb. 11) ähnelt in seinem Verhalten stark dem Helium. Dagegen zeigt Sauerstoff schon Abweichungen, die sich bei Brom und Jod weiter verstärken.

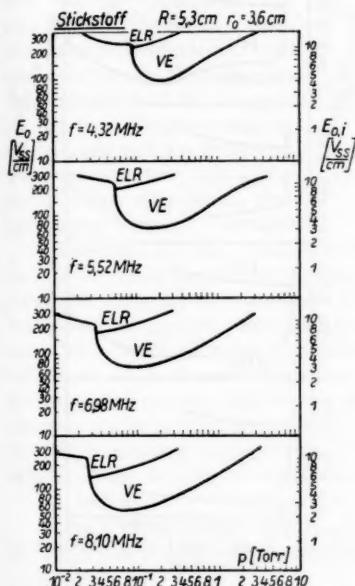


Abb. 11. Zünd- und Umschlagskurve in Stickstoff

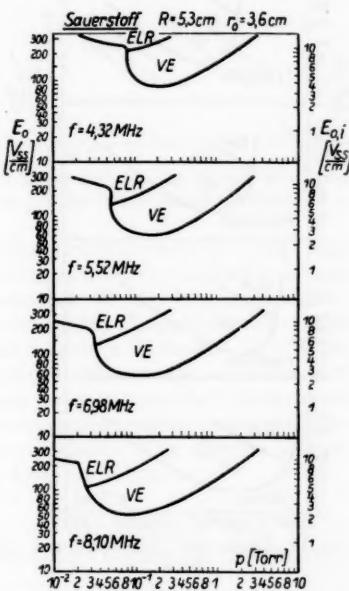


Abb. 12. Zünd- und Umschlagskurve in Sauerstoff

Während die Vorentladung in Sauerstoff unmittelbar nach der Zündung das übliche schwache diffuse Leuchten zeigt, bildet sich bei der Steigerung der Hochfrequenzspannung an der Arbeitsspule eine „Pseudoringentladung“ aus. Dieser Name wurde deshalb gewählt, weil das Bild dieser Entladung dem der ELR ähnelt. Das Gas beginnt am Rand der Kugel stärker zu leuchten, und schließlich kurz vor dem Umschlag leuchtet in der Hauptsache ein schmaler Ring in der Aquatorebene. Aber das elektrische Verhalten entspricht dem einer Vorentladung, denn der Arbeitskreis wird nur unwesentlich bedämpft. Bei weiterer Steigerung kommt es dann zu dem eigentlichen Umschlag in die ELR, die dann stark dämpfend wirkt. Eine deutliche Ausbildung des Ringes fehlt (Abb. 12).

Die Vorentladung in Brom zeigt bei höheren Drücken kein homogenes Leuchten. Visuell entsteht der Eindruck, als wirbeln viele Plasmaschläuche

mit recht großer Geschwindigkeit durcheinander. Bei Verringerung des Druckes beruhigt sich dieses turbulente Bild. Die Vorentladung ist außerdem deutlich ringförmig ausgebildet. Wird der Druck verringert, verbreitet sich der Ring und schließlich erfüllt die Vorentladung die Kugel homogen. Wird die Feldstärke gesteigert, löst sich die Vorentladung von der Wand ab, und bei

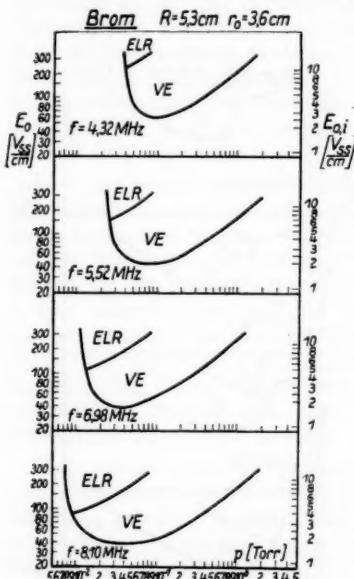


Abb. 13. Zünd- und Umschlagskurve in Brom

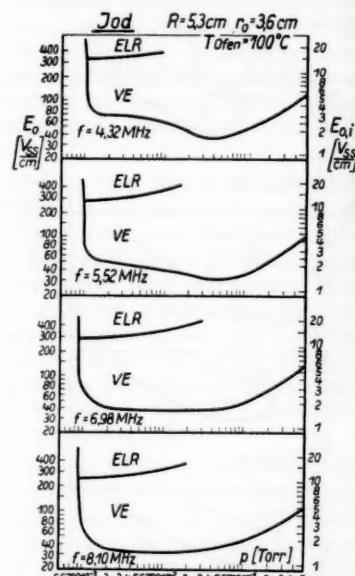


Abb. 14. Zünd- und Umschlagskurve in Jod

einer weiteren geringen Steigerung der Feldstärke kommt es zu dem Umschlag in die ELR. Diese zeigt bis zu etwa 10^{-1} Torr herab eine deutliche Ringform. Unterhalb dieses Druckes verbreitert sich der Ring rasch, und von etwa 10^{-2} Torr ab erfüllt die ELR die ganze Kugel (Abb. 13).

Im Jod sind analoge Erscheinungen zu beachten, lediglich löst sich die Vorentladung kurz vor dem Umschlag nicht von der Wand ab (Abb. 14).

Einfluß des Kugelradius auf die Zünd- und Umschlagsfeldstärke

Zur Prüfung dieser Frage wurden für ein Edelgas und ein Molekülgas (Xenon und Sauerstoff) die Zünd- und Umschlagsfeldstärken für einen Kugelradius von 2,6 cm und 4,6 cm aufgenommen. Aus diesen Untersuchungen wurde entnommen, daß für die Zündfeldstärke ein Zusammenhang mit dem Kugelradius besteht; dieser Zusammenhang ist aber keineswegs so einfach wie der, der z. B. durch das Paschensche Gesetz für den Durchschlag zwischen 2 Elektroden gegeben ist. Dagegen hängt die Umschlagsfeldstärke innerhalb der Fehlergrenzen nicht vom Kugelradius ab.

Zusammenfassung der Ergebnisse der Messungen der Zünd- und Umschlagsfeldstärken

Neben der im vorigen Abschnitt festgestellten Abhängigkeit der Zündfeldstärke von dem Radius des Entladungsgefäßes ist sie, neben ihrer natürlichen Abhängigkeit von der Gasart, von der Frequenz des erregenden Feldes abhängig. Dabei ist diese Abhängigkeit im allgemeinen so, daß die Zündfeldstärke im untersuchten Frequenzbereich mit steigender Frequenz sinkt. Die Existenzgebiete verschieben sich im Diagramm mit steigender Frequenz nach niedrigeren Feldstärken und nach niedrigeren Drücken. Die Umschlagsfeldstärke dagegen ist bei den Edelgasen nahezu unabhängig von der Frequenz, während sie bei den Halogenen einen deutlichen Frequenzgang besitzt.

Interessant ist das Verhalten des unteren Grenzdruckes p_k . Trägt man für die Edelgase die Drücke p_k gegen die Frequenz, bei der sie auftreten, auf, so erhält man im untersuchten Frequenzbereich für die fünf untersuchten Edelgase fünf parallel liegende Kurvenstücke, die im Frequenzbereich 4 MHz bis 8 MHz durch Geraden angenähert werden können (Abb. 15). Eine Regelmäßigkeit ist in diesem Diagramm zu erkennen: Nimmt man etwa die Ionisierungsspannung als Maß für die Anordnung, erkennt man, daß die einzelnen Gase so aufeinanderfolgen wie die Ionisierungsspannungen, wenn man von der Vertauschung von Helium und Neon absieht. Eine ähnliche Regelmäßigkeit ist bei den Molekülgasen nicht mehr zu finden.

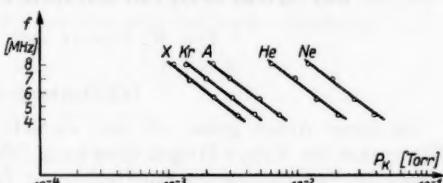


Abb. 15. Verhalten der unteren Grenzdrucke p_k bei Änderung der Frequenz für Edelgase

Herrn Professor Dr. Seeliger bin ich für die Anregung dieser Arbeit, für seine wertvollen Diskussionen und sein stetes Interesse zu großem Dank verpflichtet.

Greifswald, Institut für Gasentladungsphysik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Bei der Redaktion eingegangen am 1. Dezember 1957.

Über eine Vereinfachung der Sommerfeldschen Polynommethode

Von W. Nowak und T. Tietz

Inhaltsübersicht

In dieser Arbeit geben wir eine einfache Methode zur Bestimmung der Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung. Man sucht zuerst eine Funktion f_1 , welche für die Erfüllung der Randbedingung $R(\infty)$ bzw. der Randbedingungen $R(\infty); R(0) = 0$ der Lösung der Schrödinger-Gleichung $R = y \cdot f_1$ sorgt. Die Funktion y erfüllt in vielen Fällen eine Diff.-Gl., aus welcher man die Eigenwerte finden kann. Es wird weiter gezeigt, daß diese Methode in der Praxis sehr bequem anwendbar ist. Unsere Methode liefert uns auch die entsprechenden Eigenfunktionen.

In dieser Arbeit geben wir eine neue einfache Methode zur Bestimmung der Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung. Es ist bekannt, daß die Arbeit von Sommerfeld¹⁾ und Welker auf diesem Gebiete grundlegend ist. In neuester Zeit hat Rubinowicz²⁾ in verschiedenen Arbeiten die bekannte Methode von Sommerfeld sehr vereinfacht. Rubinowicz hat gezeigt, daß die Lösung der Schrödinger-Gleichung sich in vielen Fällen durch ein Produkt einer Funktion f und F darstellen läßt. Die Funktion f sorgt für die Erfüllung der Randbedingungen und die Funktion F bezeichnet die hypergeometrische Reihe ${}_1F_2$ oder die konfluente hypergeometrische Reihe ${}_1F_1$. Die unendlichen Reihen ${}_1F_2$ und ${}_1F_1$ muß man, um die Erfüllung der Randbedingungen zu sichern, abbrechen. Das Abbrechen der unendlichen Reihen gibt uns die Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung. Tietz³⁾ hat später gezeigt, daß im Falle, wo sich die Lösung der Schrödinger-Gleichung in der Form $f \cdot F$ mit $F = {}_1F_2$ oder $F = {}_1F_1$ darstellen läßt, die Gesamtheit der Nullstellen der Funktion von ${}_1F_2$ oder der Funktion ${}_1F_1$ die Gesamtheit der Eigenwerte der Schrödinger-Gleichung liefert. Tietz hat die Gesamtheit der Nullstellen der Funktionen ${}_1F_1$ und ${}_1F_2$ bestimmt.

Zuerst betrachten wir folgende Diff.-Gl.

$$(a x^2 + b x + c) \frac{d^2 y}{dx^2} + (d x + f) \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0. \quad (1)$$

In dieser Diff.-Gl. sind a, b, c, d, f Konstanten. Brenke⁴⁾ hat gezeigt, daß die Lösung der Diff.-Gl. (1) nur in dem Falle ein Polynom ist, wenn die oben

¹⁾ A. Sommerfeld u. H. Welker, Ann. Physik **32**, 56 (1938).

²⁾ A. Rubinowicz, Proc. physie. Soc. London **63**, 766 (1950).

³⁾ T. Tietz, Il Nuovo Cimento **12**, 449 (1954); Acta Phys. Hung **5**, 347 (1955).

⁴⁾ W. C. Brenke, Bull. Amer. Mat. Soc. **36**, 77 (1930).

erwähnten Konstanten folgende Bedingung erfüllen

$$\lambda = \lambda_\nu = -a\nu(\nu-1) - d\nu, \quad \text{wo} \quad \nu = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2)$$

Die Polynome, welche die Diff.-Gl. (1) für $\lambda = \lambda_\nu$ lösen, seien

$$y_\nu = \sum_{\alpha=0}^{\nu} c_{\nu, \alpha} x^\alpha, \quad \text{wo} \quad c_{\nu, \nu} = 1. \quad (3)$$

Die übrigen $c_{\nu, \alpha}$ für ein gegebenes λ_ν sind leicht zu bestimmen. In den Fällen, in welchen die Lösung R der radialen Schrödinger-Gleichung

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - V + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right] R = 0 \quad (4)$$

oder eindimensionalen Schrödinger-Gleichung

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) R = 0 \quad (5)$$

sich als ein Produkt von der Form $R = f_1 \cdot y$ darstellen lässt, kann man mit Hilfe der Formel (2) die Eigenwerte E , der Schrödinger-Gleichung leicht finden. Die Funktion f_1 sorgt für die Erfüllung der Randbedingung $R(\infty) = 0$ und die Funktion y ist die Lösung der Diff.-Gl. (1). Die folgenden Beispiele zeigen, wie unsere Methode praktisch verläuft. Als erstes Beispiel betrachten wir die Schrödinger-Gleichung mit Wigner-Potential für den S -Zustand. Für diesen Fall lässt sich die Schrödinger-Gleichung in der Form schreiben:

$$\frac{d^2R}{d\xi^2} - \left[\eta - C^2 \frac{e^{-\xi}}{1 - e^{-\xi}} \right] R = 0, \quad (6)$$

wo die Abkürzungen ξ , η , C folgende Bedeutungen haben:

$$\xi = \frac{2\pi r}{\lambda_M}; \quad \eta = -\frac{\lambda_M^2 m E}{\hbar^2}; \quad C^2 = \frac{\gamma^2 c^2 m \lambda_M}{2 \hbar^2}. \quad (7)$$

E ist Eigenwertsparameter, γ ist eine Konstante und λ_M ist die Comptonwellenlänge eines Mesons. Der Ansatz

$$R(\xi) = y(\xi) e^{-\xi \sqrt{\eta}}; \quad x = 1 - e^{-\xi} \quad (8)$$

liefert für die Funktion $y(x)$ eine Diff.-Gl. der Gestalt (1) und daraus die Eigenwerte η_n bzw. E_n :

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d^2y}{dx^2} - (2\sqrt{\eta} + 1)x \frac{dy}{dx} + C^2 y &= 0, \\ -\frac{\lambda_M^2 m E_n}{\hbar^2} = \eta_n &= \frac{1}{4} \left(\frac{C^2}{n} - n \right)^2, \quad \text{wo} \quad n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Als zweites Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2} \mu x^2 \right) R = 0. \quad (10)$$

Der Ansatz

$$R = y e^{-\alpha x^2} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\pi}{\hbar} \sqrt{\mu m} \quad (11)$$

gibt für die Funktion y folgende Diff.-Gl.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\alpha x \frac{dy}{dx} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} E - 2\alpha \right] y = 0. \quad (12)$$

Die letzte Diff.-Gl. ist vom Typ der Diff.-Gl. (1) und damit folgen die Eigenwerte nach Formel (2)

$$E_n = \hbar \sqrt{\frac{\mu}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right)}, \quad \text{wo } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (13)$$

Im Falle des Wasserstoffatoms haben wir wie bekannt

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2 m}{\hbar^2} \left[E + \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2 m r^2} \right] R = 0. \quad (14)$$

Der Ansatz

$$R = r^{l+1} e^{-\alpha r} y(r) \quad \text{mit } \alpha = \sqrt{\frac{-2 m E}{\hbar^2}} \quad (15)$$

sorgt für die Erfüllung der Randbedingungen $R(0) = 0$; $R(\infty) = 0$ und gibt uns in diesem Falle folgende Diff.-Gl. für y

$$r \frac{d^2 y}{dr^2} + [2l(l+1) - 2\alpha r] \frac{dy}{dr} + \left[-2(l+1)\alpha + \frac{2m}{\hbar^2} e^2 \right] y = 0. \quad (16)$$

Die letzte Diff.-Gl. hat die Form der Diff.-Gl. (1) und die Eigenwerte E_n lauten gemäß Formel (2)

$$E_n = -\frac{m e^4}{2 \hbar^2 n^2}, \quad \text{wo } n = 1, 2, 3 \dots \quad (17)$$

Als letztes Beispiel bestimmen wir die Werte der Separationskonstanten A . Wie bekannt, hat man es in diesem Falle mit folgender Diff.-Gl. zu tun⁵⁾:

$$(1 - u^2) \frac{d^2 y}{du^2} - 2(\lambda + 1)u \frac{dy}{du} + (A - \lambda^2 - \lambda)y = 0, \quad (18)$$

wo λ eine ganze Zahl ist. Diese Diff.-Gl. ist von der Form der Diff.-Gl. (1) und darum bekommen wir wegen (2) für die Separationskonstante A folgende Formel:

$$A = (\nu + \lambda)(\nu + 1 + \lambda). \quad (19)$$

Wenn wir $\lambda + \nu = l$ schreiben, so haben wir den bekannten Wert für die Separationskonstante: $A = l(l+1)$. Die oben behandelten Beispiele zeigen, daß unsere Methode sehr einfach ist.

Um die Eigenwerte in unserem Falle zu bestimmen, brauchen wir die Diff.-Gl. für y nicht zu lösen. Hat man die Eigenwerte gefunden, so bleibt noch übrig die Eigenfunktionen mit Hilfe der Gln. (1) und (3) zu bestimmen. In allen Fällen kommt man mit unserer Methode schneller zum Ziele als mit der von Sommerfeld und Rubinowicz.

⁵⁾ W. Weizel, Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd. II, S. 803. Springer Verlag 1950. Bei Weizel steht F an Stelle von y .

Łódź (Polen), Universität Łódź, Institut für Theoretische Physik.

Bei der Redaktion eingegangen am 11. Oktober 1957.

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

. (1)

fol-

(19)

Se-

gen,

-Gl.

brig

llen

der

rlag

Über die relativistischen Phasenverschiebungen der Partialwellen im statistischen Thomas-Fermi-Streufelde

Von Tomasz Gajewski

Inhaltsübersicht

Es wird eine der in einer früheren Arbeit¹⁾ des Verfassers angewandten nichtrelativistischen Methode der Auffindung von Phasenverschiebungen der Partialwellen bei Streuung von Elektronen am Thomas-Fermi-Atom analoge relativistische Methode entwickelt. Auf Grund des Vergleiches beider Methoden wird gezeigt, daß die in der erwähnten Arbeit erhaltenen Formeln mit entsprechenden Korrekturen auch bei relativistischer Betrachtungsweise übernommen werden können. Die mittels dieser modifizierten relativistischen Formeln berechneten Phasenverschiebungen werden dann einerseits mit den mittels der früheren nichtrelativistischen Formeln berechneten Werten und anderseits mit den auf numerischem Wege erhaltenen Werten verglichen.

In einer früheren Arbeit¹⁾ des Verfassers wurden die analytischen Formeln für die asymptotischen Phasenverschiebungen in der Methode der Partialwellen bei Streuung von Elektronen an neutralen Thomas-Fermi-Atomen gefunden. Das dabei durchgeführte Verfahren war aber nichtrelativistisch. Es wird hier dasselbe Problem relativistisch behandelt und die sich daraus ergebenden Korrekturen untersucht. Zunächst wird gezeigt, daß sowohl die Methode als auch die Ergebnisse der erwähnten Arbeit sich bei der hier vorgenommenen relativistischen Behandlung weitgehend anwenden lassen. Dies erfordert also eine kurze Übersicht über die nichtrelativistische Behandlungsweise. Die Grundlage der Methode der Partialwellen bei nichtrelativistischer Behandlung bietet bekanntlich die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U \psi = E \psi, \quad (1)$$

wo E die kinetische Energie des einfallenden Elektrons im unendlichen Abstand vom Streuzentrum ist, und für seine potentielle Energie im Falle des neutralen Thomas-Fermi-Atoms

$$U = -\frac{Ze^2}{r} q \left(\frac{r}{\mu} \right) \quad (2)$$

zu setzen ist.

¹⁾ T. Gajewski, Ann. Physik (7) 1, 232 (1958).

$\varphi(x)$ mit $x = \frac{r}{\mu}$ und $\mu = 0,88534 Z^{-1/4}$ ist dabei die entsprechende Lösung der Thomas-Fermi-Gleichung, die in der Form von Buchdahl²⁾

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 + Ax)(1 + Bx)(1 + Cx)} \quad (3)$$

mit $A = 0,9288$, $B = 0,1538$, $C = 0,05727$ in der vorigen Arbeit von uns angenommen wurde und auch hier bei relativistischer Betrachtung angenommen wird. In atomaren Einheiten ($a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$ für Länge, $\frac{e^2}{2 a_0}$ für Energie) lässt sich die Schrödinger-Gleichung (1) in der Form schreiben

$$(\Delta + E + 2V)\psi = 0 \quad (4)$$

mit

$$V = \frac{Z}{r} \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right). \quad (5)$$

Die bei der hier angenommenen axialen Symmetrie übliche Entwicklung von ψ nach den Legendreschen Polynomen

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \frac{u_l(r)}{r} P_l(\cos \theta) \quad (6)$$

liefert bekanntermaßen für die radiale Eigenfunktion $u_l(r)$ die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E + 2V - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l = 0. \quad (7)$$

Für die uns interessierenden asymptotischen Phasendifferenzen δ_l der Lösungen dieser und der aus dieser für $V = 0$ sich ergebenden Gleichungen erhielt Henneberg³⁾ die Näherungsformel

$$\delta_l = \int_{r_0}^{\infty} \frac{V(r) dr}{\sqrt{E - \lambda^2/r^2}} \quad (8)$$

mit $\lambda = l + \frac{1}{2}$ und $r_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{E}}$.

Die Benutzung der Buchdahlschen Lösung (3) der Thomas-Fermi-Gleichung ermöglichte uns¹⁾ mittels der Hennebergschen Formel (8) die Aufstellung folgender analytischer Formeln für δ_l :

$$\delta_l = \frac{Z}{\lg e \sqrt{E}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2}}} + \frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \right], \quad (9)$$

²⁾ H. A. Buchdahl, Ann. Physik **17**, 238 (1955).

³⁾ W. Henneberg, Z. Physik **88**, 555 (1933).

sung

wenn

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} > 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} > 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0;$$

(3)

nge-

men

läßt

$$\delta_i = \frac{2Z}{\sqrt{E}} \frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \right) + \frac{Z}{\lg e \sqrt{E}} \quad (9')$$

(4)

$$\left[\frac{\beta}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2}}} + \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \right],$$

(5)

on ψ

wenn

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} > 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0;$$

(6)

$$\delta_i = \frac{2Z}{\sqrt{E}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \right) + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \right] \quad (9'')$$

(7)

$$\cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \right) + \frac{Z}{\lg e \sqrt{E}} \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}} \lg \frac{\frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2}}},$$

Lö-

gen

wenn

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} > 0;$$

mi-

die

$$\delta_i = \frac{2Z}{\sqrt{E}} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda A}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} - 1}} \right) + \frac{\beta}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \right] \quad (9''')$$

 $\frac{B^2}{\mu^2}$

$$\cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda B}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} - 1}} \right) + \frac{\gamma}{\sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{\lambda C}{\mu \sqrt{E}}}{\sqrt{\frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} - 1}} \right),$$

(9)

wenn

$$1 - \frac{\lambda^2 A^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 B^2}{E \mu^2} < 0; \quad 1 - \frac{\lambda^2 C^2}{E \mu^2} < 0,$$

wo

$$\alpha = \frac{A^2}{(A - B)(A - C)}; \quad \beta = \frac{B^2}{(B - C)(B - A)}; \quad \gamma = \frac{C^2}{(C - A)(C - B)}.$$

Als Grundlage der hier zu verfolgenden relativistischen Behandlungsweise des Streuprozesses nehmen wir die relativistische zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung an

$$(-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4) \psi = (E_{\text{rel}} - \varepsilon \Phi)^2 \psi, \quad (10)$$

wo E_{rel} die Summe der nichtrelativistischen kinetischen Energie E des Elektrons im unendlichen Abstand vom Streuzentrum und seiner Ruheenergie $m c^2$ ist.

$$E_{\text{rel}} = E + m c^2. \quad (11)$$

Für das gestreute Elektron ist die Ladung $\varepsilon = -e$ und für das streuende neutrale Thomas-Fermi-Atom das skalare Potential $\Phi = \frac{Z e}{r} \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right)$. Damit nimmt die Schrödinger-Gleichung (10) die Gestalt

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{\left(E + m c^2 + \frac{Z e^2}{r} \varphi \right)^2 - m^2 c^4}{2m c^2} \right] \psi = 0 \quad (12)$$

an, und in atomaren Einheiten

$$\left[\Delta + \frac{(E + m c^2 + 2 V)^2 - m^2 c^4}{2m c^2} \right] \psi = 0, \quad (13)$$

wieder mit $V = \frac{Z}{r} \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right)$.

Gl. (13) lässt sich in der Form schreiben

$$\left[\Delta + E' + 2 V' + \frac{2 V^2}{m c^2} \right] \psi = 0, \quad (14)$$

wo

$$E' = E \left(1 + \frac{E}{2m c^2} \right) \quad (15)$$

$$V' = V \left(1 + \frac{E}{m c^2} \right). \quad (16)$$

Dieselbe Entwicklung von ψ nach den Legendreschen Polynomen wie im nichtrelativistischen Fall liefert für die radiale Eigenfunktion $u_l(r)$ die folgende Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E' + 2 V' + \frac{2 V^2}{m c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l = 0. \quad (17)$$

Wäre V das Potential des Coulombfeldes $V = \frac{Z}{r}$, so wäre $\frac{2 V^2}{m c^2} = \frac{2 Z^2/m c^2}{r^2}$ und mit $\lambda'^2 = l(l+1) - \frac{2 Z^2}{m c^2}$ ließe sich die Gl. (17) in der zur (7) analogen Gestalt schreiben

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E' + 2 V' - \frac{\lambda'^2}{r^2} \right) u_l = 0. \quad (18)$$

Da aber unser Potential $V = \frac{Z}{r} \varphi \left(\frac{r}{\mu} \right)$ für das neutrale Thomas-Fermi-Atom sehr viel rascher abfällt als das Coulombsche, weicht λ^2 von $l(l+1)$ stets um weniger als $\frac{2Z^2}{mc^2}$ ab, und man kann $\lambda^2 = l(l+1)$ setzen außer für die kleinsten l -Werte. Also erhalten wir für nicht zu kleine l -Werte die Gleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + E' + 2V' - \frac{l(l+1)}{r} \right) u_l = 0, \quad (19)$$

deren Folge wieder die Hennebergsche Formel

$$\delta_l = \int_{r_0}^{\infty} \frac{V'(r) dr}{\sqrt{E' - \lambda^2/r^2}} \quad (20)$$

ist. Daraus ergibt sich sofort, daß man mit Benutzung des Buchdahlschen Potentials (3) wieder zu den zu (9-9'') analogen Formeln für δ_l gelangt. Diese relativistischen Formeln ergeben sich aus den entsprechenden nichtrelativistischen (9-9'') durch Ersetzen von E durch $E \left(1 + \frac{E}{2mc^2} \right)$ und

Multiplikation des ganzen Resultats für δ_l mit $\left(1 + \frac{E}{2mc^2} \right)$, was folgendermaßen geschrieben werden kann

$$\delta_l(E)_{\text{rel}} = \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) \delta_l \left[E \left(1 + \frac{E}{2mc^2} \right) \right]_{\text{nichtrel}}. \quad (21)$$

Hierbei bedeuten $\delta_l(E)_{\text{nichtrel}}$ die durch die Formeln (9-9'') gegebenen nichtrelativistischen Phasenverschiebungen.

Zur Prüfung der Gültigkeit unserer Formeln (21 mit 9) für die Phasenverschiebungen geben wir in der nachfolgenden Tabelle einen Vergleich der mit ihrer Hilfe berechneten δ_l -Werte (δ_{rel}) für Uran ($Z = 92$) mit den numerischen Werten (δ_l numer) von Hoerni und Ibers⁴⁾ und mit den mittels der in unserer vorigen Arbeit erhaltenen nichtrelativistischen Formeln (9) berechneten Werten (δ_l nichtrel). Die hier zu vergleichenden δ_l -Werte entsprechen der Energie von 40 keV (2956 atomaren Einheiten). Die dabei in die Rechnungen einbezogene Ruheenergie des Elektrons mc^2 wird natürlich auch in atomaren Einheiten genommen und beträgt 37753 aE.

l	0	2	4	6	8	10	15	20
δ_l numer	6,11	3,49	2,47	1,87	1,53	1,26	0,847	0,602
δ_l rel	6,07	3,27	2,34	1,81	1,47	1,22	0,831	0,607
δ_l nichtrel	5,70	3,07	2,19	1,69	1,37	1,13	0,769	0,548

δ_l -Werte für Uran bei einer Elektronenenergie von 40 keV.

⁴⁾ I. A. Hoerni, I. A. Ibers, Physic. Rev. 91, 1183 (1953).

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß man mittels der in dieser Arbeit aufgestellten relativistischen Formeln (21 mit 9) für die Phasenverschiebungen zu einer viel besseren Übereinstimmung mit den numerischen Werten gelangt, als dies im Falle der nichtrelativistischen Formeln (9) möglich war. Durch Anwendung dieser Formeln kann man also bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte die mühsamen numerischen Rechnungen vermeiden.

Herrn Prof. Dr. F. J. Wiśniewski und Herrn Dr. T. Tietz möchte ich an dieser Stelle für ihr förderndes Interesse und wertvolle Ratschläge herzlich danken.

Lódź (Polen), Institut für Theoretische Physik der Universität Lodz.

Bei der Redaktion eingegangen am 6. November 1957.

Verantwortlich
für die Schriftleitung: Prof. Dr. G. Richter, Zeuthen-Miersdorf, Platanenallee 6; für den Anzeigen-
teil: VEB Georg Thieme, Anzeigenabteilung, Leipzig C 1, Thomaskirchhof 20, Ruf 21 005. Z. Z. gilt
Anzeigenpreisliste Nr. 4. Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstraße 18B,
Fernruf: 63105, 63781, ZLN 5066

Printed in Germany

Druck: Paul Dünnhaupt, Köthen (IV/5/1) L 75/8

Lehrbuch der Kernphysik

Herausgegeben von Professor Dr. GUSTAV HERTZ

mit Beiträgen von

Dr. K. F. Alexander, Professor Dr. H. Barwich, Dr. F. Bernhard, W. Degner, Professor Dr. A. Eckardt, Dr. D. Geißler, Professor Dr.-Ing. W. Hartmann, Professor Dr. G. Hertz, Professor Dr. L. Kolditz, Dr. K. Lanius, W. Lohmann, Professor Dr. A. Lösche, Dr. D. Lyons, Dr. J. Mühlenfeld, Professor Dr. G. Richter, Professor Dr. J. Schintlmeister, Dr. T. Schönfeld, Professor Dr. H. Schreiber, Professor Dr. C. F. Weiß, Dr. S. Wohlrab

Dieses dreibändige Lehrbuch ist in erster Linie für die Ausbildung von qualifizierten Kernphysikern gedacht. Darüber hinaus soll es den Naturwissenschaftlern anderer Disziplinen, Technikern und Medizinern das in steigendem Maße auch für ihre Arbeit erforderliche Wissen um die kernphysikalischen Vorgänge vermitteln und nicht zuletzt ist es nach seiner Anlage und durch das beigegebene übersichtliche Tabellenmaterial ein wertvolles Nachschlagewerk.

Die genannten Autoren haben die jeweils ihrem speziellen Arbeitsgebiet entsprechenden Kapitel verfaßt, so daß die Darstellung hohen Ansprüchen gerecht wird. Zahlreiche Literaturhinweise ermöglichen, tiefer in die einzelnen Teilgebiete, z. B. in die Neutronenphysik oder die Reaktortheorie, einzudringen.

Band I

Experimentelle Verfahren

Erscheint in Kürze

Etwa 220 Seiten mit 139 Abbildungen. DIN C 5

In Ganzleinen mit Schutzumschlag etwa 15,— DM

Aus dem Inhalt: Einführung · Verfahren zur Bestimmung der Grundgrößen der Atomkerne · Nachweis von energiereicher Strahlung · Beschleunigung von Teilchen.

Band II

Physik der Atomkerne

Erscheint Herbst 1958

Etwa 500 Seiten mit etwa 300 Abbildungen. DIN C 5

In Ganzleinen mit Schutzumschlag etwa 28,— DM

Aus dem Inhalt: Eigenschaften der stabilen Kerne · Kernumwandlungen · Kernprozesse bei extrem hohen Energien · Theorie der Atomkerne · Neutronenphysik.

Band III

Angewandte Kernphysik

In Vorbereitung

Etwa 250 Seiten mit etwa 150 Abbildungen. DIN C 5

In Ganzleinen mit Schutzumschlag etwa 18,— DM

Aus dem Inhalt: Reaktoren · Isotopentrennung · Radiochemie · Anwendung von Isotopen · Anhang: Dosimetrie und Strahlenschutz.



B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT · LEIPZIG

PRESSLER



PHOTOZELLEN

für Wissenschaft
und Technik

DEUTSCHE GLÜMLAMPEN-GES. PRESSLER
LEIPZIG C1. BERLINER STR. 69

Wissenschaftliche Selbstbiographie

von MAX PLANCK

3. Auflage,

34 Seiten m. 1 Bildnis. 1955.
DIN A5. DM 1.35

(= Heft 5 „Lebensdarstellungen
deutscher Naturforscher“)

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

HORT-THOMA

**Die Differentialgleichungen
der Technik und Physik**

7. Auflage des Lehrbuches

„Die Differentialgleichungen des Ingenieurs“ von W. HORT

Neubearbeitet von Dr. phil. ALFRED THOMA, Fulda

XI, 582 Seiten mit 343 Abb. im Text. 1956. Gr. 8°. DM 36.—, Ln. DM 38.—

„Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete“: „Der Verfasser hat mit viel Geschick und Umsicht die Fülle des den verschiedenen Gebieten der Technik und Physik entnommenen Stoffes zu einem Ganzen geformt, ohne dabei das Ziel aus den Augen zu verlieren, den Nutzen der Mathematik im Schaffen des Ingenieurs deutlich erkennbar zu machen. Da das Buch in erster Linie für Ingenieure und Physiker geschrieben ist, liegt bei der Darstellung der mathematischen Methoden die Betonung auf dem Handwerklichen. Die vorliegende Auflage des bewährten Werkes wird sich sicherlich in Ingenieurkreisen viele Freunde erwerben.“

W. Quade

Operatorenrechnung

und Laplacesche Transformation nebst Anwendungen in Physik und Technik

Von Prof. Dr. phil., Dr.-Ing. e. h. K. W. WAGNER†

2., verbesserte Auflage

XVIII, 471 Seiten mit 126 Abb. im Text und einem Porträt von Laplace.
1950. Gr. 8°. DM 40.30, Leinen DM 42.80

VDI-Zeitschrift: Der Verfasser führt in die ganze Theorie ein, indem er sehr wertvolle praktische Beispiele aus verschiedenen Disziplinen der Naturwissenschaft und Technik durchrechnet. Man lernt, die Verfahren zu handhaben, aus dem Gefühl heraus, daß sie die einzige Möglichkeit bieten, die Probleme anzugreifen. Das Studium des vorliegenden Werkes kann Naturwissenschaftlern, Technikern und Mathematikern wärmstens empfohlen werden.

U. Wegner

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG